CHAPITRE VI

SYSTÈMES DE RACINES

§ 1. Systèmes de racines

Dans ce paragraphe, k désigne un corps de caractéristique zéro. A partir du nº 3, on suppose que $k = \mathbf{R}$.

1. Définition d'un système de racines

Lemme 1. — *Soient* V *un espace vectoriel sur* k, R *une partie finie de* V *engendrant* V. *Pour tout* $\alpha \in R$ *tel que* $\alpha \neq 0$, *il existe au plus une réflexion* s *de* V *telle que* $s(\alpha) = -\alpha$ *et* $s(R) = R$.

Soit G le groupe des automorphismes de V qui laissent R stable. Comme R engendre V, G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique de R, donc est fini. Soient s, s' deux réflexions de V telles que $s(\alpha) = s'(\alpha) = -\alpha$, $s(R) = R$, $s'(R) = R$. Alors $t = ss'$ appartient à G, donc est d'ordre fini m. D'autre part, on a :

$$t(\alpha) = \alpha \qquad \text{et} \qquad t(x) \equiv x \bmod. k\alpha \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

Il existe donc une forme linéaire f sur V telle que

$$t(x) = x + f(x)\alpha \qquad \text{pour tout } x \in V,$$

et l'on a $f(\alpha) = 0$. Par récurrence sur n, on en déduit que

$$t^n(x) = x + nf(x)\alpha \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

En prenant n égal à m, on voit que $mf(x) = 0$ pour tout $x \in V$, d'où $f = 0$, $t = 1$, et $s = s'$.

DÉFINITION 1. — *Soient* V *un espace vectoriel sur* k, *et* R *une partie de* V. *On dit que* R *est un système de racines dans* V *si les conditions suivantes sont vérifiées* :

(SR_I) R *est fini, ne contient pas* 0, *et engendre* V.

(SR_{II}) *Pour tout* $\alpha \in R$, *il existe un élément* $\alpha^\vee$ *du dual* V^* *de* V *tel que* $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ *et que la réflexion* $s_{\alpha, \alpha^\vee}$ (cf. chap. V, § 2) *laisse stable* R.

(SR_{III}) *Pour tout* $\alpha \in R$, *on a* $\alpha^\vee(R) \subset \mathbf{Z}$.

D'après le lemme 1, la réflexion $s_{\alpha, \alpha^\vee}$ (donc aussi la forme linéaire $\alpha^\vee$) est déterminée de manière unique par α, ce qui donne un sens à (SR_{III}). On posera $s_{\alpha, \alpha^\vee} = s_\alpha$. On a $s_\alpha(x) = x - \langle \alpha^\vee, x \rangle$ pour tout $x \in V$.

Les éléments de R sont appelés les *racines* (du système considéré). La dimension de V s'appelle le *rang* du système.

Les automorphismes de V qui laissent stable R s'appellent les automorphismes de R. Ils forment un groupe fini noté A(R). Le sous-groupe de A(R) engendré par les s_α s'appelle le *groupe de Weyl* de R et se note W(R), ou simplement W.

Remarque 1). — Soit k' une extension de k. Identifions canoniquement V à un sous-ensemble de $V \otimes k'$ et V^* à un sous-ensemble de $V^* \otimes k' = (V \otimes k')^*$. Alors, R est un système de racines dans $V \otimes k'$, et les $\alpha^\vee$ sont les mêmes que précédemment.

Lemme 2. — *Soit* R *un système de racines dans* V. *Soit* $(x|y)$ *une forme bilinéaire symétrique sur* V, *non dégénérée, invariante par* W(R). *Identifions* V *à* V^* *grâce à cette forme. Si* $\alpha \in R$, α *est non isotrope et*

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}.$$

Cela résulte de la formule (4) du Chap. V, § 2, n° 3.

PROPOSITION 1. — *Soit* V_Q (resp. V_Q^*) *le sous-*$\mathbf{Q}$*-espace vectoriel de* V (resp. V^*) *engendré par les* α (resp. *les* $\alpha^\vee$). *Alors* V_Q (resp. V_Q^*) *est une* $\mathbf{Q}$*-structure sur* V (resp. V^*) (*Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 8, n° 1). *La restriction à* $V_Q \times V_Q^*$ *de la forme bilinéaire canonique de* $V \times V^*$ *permet d'identifier chacun des espaces* V_Q, V_Q^* *au dual de l'autre. L'ensemble* R *est un système de racines dans* V_Q.

Si $k = \mathbf{R}$, il existe un produit scalaire sur V invariant par W(R) (*Intégr.*, chap. VII, § 3, n° 1, prop. 1) ; le lemme 2 prouve alors que les $\alpha^\vee$ engendrent V^*. D'après la *Remarque* 1, les $\alpha^\vee$ engendrent encore V^* si $k = \mathbf{Q}$. Arrivons au cas général. Posons $E = V_Q$. D'après (SR_{III}), chaque $\alpha^\vee$ applique E dans $\mathbf{Q}$, donc définit un élément $\tilde{\alpha}$ de E^*. Il est immédiat que R est un système de racines dans E, et que l'élément correspondant à α dans E^* est $\tilde{\alpha}$. D'après ce qui précède, les $\tilde{\alpha}$ engendrent l'espace vectoriel E^*. Considérons l'homomorphisme canonique $i : E \otimes_Q k \to V$, et son transposé ${}^t i : V^* \to E^* \otimes_Q k$. Puisque R engendre V, i est surjectif, donc ${}^t i$ est injectif; mais l'image de ${}^t i$ contient les $\tilde{\alpha}$, donc ${}^t i$ est surjectif. On en conclut finalement que i et ${}^t i$ sont des isomorphismes. On peut identifier V à $E \otimes k$, V^* à $E^* \otimes k$, $\alpha^\vee$ à $\tilde{\alpha}$ et V_Q^* à E^*. Ainsi V_Q (resp. V_Q^*) est une $\mathbf{Q}$-structure sur V (resp. V^*). La restriction à $V_Q \times V_Q^*$ de la forme bilinéaire canonique de $V \times V^*$ s'identifie à la forme bilinéaire canonique sur $E \times E^*$, d'où la proposition.

Remarques 2). — Grâce à la prop. 1, on peut ramener l'étude des systèmes de racines au cas où $k = \mathbf{Q}$. La *Remarque* 1 permet ensuite de se ramener à un système de racines de l'espace vectoriel réel $V_{\mathbf{R}} = V_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$. Les groupes de Weyl associés à ces différents systèmes s'identifient canoniquement.

3) Puisque les $\alpha^{\vee}$ engendrent V^*, le groupe $W(R)$, considéré comme sous-groupe de $\mathbf{GL}(V_{\mathbf{R}})$, est *essentiel* (chap. V, § 3, nº 7). De plus, le cor. du th. 1 du chap. V, § 3, nº 2 montre que les seules réflexions appartenant à $W(R)$ sont les s_{α}.

PROPOSITION 2. — *Les* $\alpha^{\vee}$ *forment un système de racines dans* V^*, *et on a* $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ *pour tout* $\alpha \in R$.

Les $\alpha^{\vee}$ vérifient (SR_{I}) d'après la prop. 1. Puisque $s_{\alpha, \alpha^{\vee}}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel V muni du sous-ensemble R, ${}^{t}(s_{\alpha, \alpha^{\vee}})^{-1}$ laisse stable l'ensemble $R^{\vee}$ des $\alpha^{\vee}$; or ${}^{t}(s_{\alpha, \alpha^{\vee}})^{-1} = s_{\alpha^{\vee}, \alpha}$, ce qui prouve que $R^{\vee}$ vérifie (SR_{II}) et que $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$. Enfin, on a $\langle \alpha^{\vee}, \beta \rangle \in \mathbf{Z}$ quels que soient $\alpha^{\vee} \in R$ et $\beta \in R$, donc $R^{\vee}$ vérifie (SR_{III}).

On dit que $R^{\vee}$ est le *système de racines inverse de* R. On voit que l'application $\alpha \longmapsto \alpha^{\vee}$ est une bijection de R sur $R^{\vee}$ appelée *bijection canonique de* R *sur* $R^{\vee}$. On prendra garde que, si α, β sont des éléments de R tels que $\alpha + \beta \in R$, alors $(\alpha + \beta)^{\vee} \neq \alpha^{\vee} + \beta^{\vee}$ en général.

Comme $s_{\alpha}(\alpha) = -\alpha$, l'axiome (SR_{II}) montre que $-R = R$. On a évidemment $(-\alpha)^{\vee} = -\alpha^{\vee}$ et $-1 \in A(R)$ (mais on n'a pas toujours $-1 \in W(R)$).

L'égalité ${}^{t}(s_{\alpha, \alpha^{\vee}})^{-1} = s_{\alpha^{\vee}, \alpha}$ prouve que l'application $u \longmapsto {}^{t}u^{-1}$ est un isomorphisme du groupe $W(R)$ sur le groupe $W(R^{\vee})$. On identifie ces deux groupes par cet isomorphisme; autrement dit, on considère $W(R)$ comme opérant dans V et dans V^*. De même pour $A(R)$.

PROPOSITION 3. — *Pour* $x, y \in V$, *posons*

$$(x|y) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha^{\vee}, x \rangle \langle \alpha^{\vee}, y \rangle.$$

Alors $(x|y)$ *est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* V, *invariante par* $A(R)$. *Pour* $x, y \in V_{\mathbf{Q}}$, *on a* $(x|y) \in \mathbf{Q}$. *L'extension canonique de* $(x|y)$ *à*

$$V_{\mathbf{R}} = V_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$$

est positive non dégénérée.

Il est clair que $(x|y)$ est une forme bilinéaire symétrique sur V. Si $g \in A(R)$, on a

$$(g(x)|g(y)) = \sum_{\alpha \in R} \langle {}^{t}g(\alpha^{\vee}), x \rangle \langle {}^{t}g(\alpha^{\vee}), y \rangle = (x|y)$$

puisque $({}^{t}g)(R^{\vee}) = R^{\vee}$. Si $x, y \in V_{\mathbf{Q}}$, on a $(x|y) \in \mathbf{Q}$ d'après (SR_{III}). Si $z \in V_{\mathbf{R}}$, on a $(z|z) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha^{\vee}, z \rangle^{2} \geqslant 0$, et $(z|z) > 0$ si $z \neq 0$ d'après la prop. 1, donc l'extension canonique de $(x|y)$ à $V_{\mathbf{R}}$ positive est non dégénérée. La restriction de $(x|y)$ à $V_{\mathbf{Q}}$ est donc non dégénérée, et par suite la forme $(x|y)$ sur V est non dégénérée.

PROPOSITION 4. — (i) *Soit* X *une partie de* R, *soit* V_X *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* X, *et soit* V'_X *le sous-espace vectoriel de* V^* *engendré par les* $\alpha^\vee$, *où* $\alpha \in X$. *Alors* V *est somme directe de* V_X *et du sous-espace orthogonal à* V'_X, V^* *est somme directe de* V'_X *et du sous-espace orthogonal à* V_X, *et* V'_X *s'identifie au dual de* V_X.

(ii) $R \cap V_X$ *est un système de racines dans* V_X, *et la bijection canonique de* $R \cap V_X$ *sur le système inverse s'identifie à l'application* $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ *restreinte à* $R \cap V_X$.

Grâce à la *remarque* 2, on peut supposer que $k = \mathbf{R}$. Identifions V à V^* grâce à la forme bilinéaire symétrique de la prop. 3. On a $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$ pour tout $\alpha \in R$ (lemme 2). Tout sous-espace vectoriel de V est non isotrope, et la proposition est alors évidente.

COROLLAIRE. — *Soit* V_1 *un sous-espace vectoriel de* V, *et soit* V_2 *le sous-espace vectoriel engendré par* $R \cap V_1$. *Alors* $R \cap V_1$ *est un système de racines dans* V_2.

Cela résulte de (ii), appliqué à $X = R \cap V_1$.

Pour $\alpha \in R$ et $\beta \in R$, on pose :

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = n(\alpha, \beta). \tag{1}$$

On a donc :

$$n(\alpha, \alpha) = 2 \tag{2}$$

$$n(-\alpha, \beta) = n(\alpha, -\beta) = -n(\alpha, \beta). \tag{3}$$

D'après (SR_{III}),

$$n(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

Par définition même de $n(\alpha, \beta)$,

$$s_\beta(\alpha) = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta. \tag{5}$$

La formule (1) et la prop. 2 entraînent

$$n(\alpha, \beta) = n(\beta^\vee, \alpha^\vee). \tag{6}$$

Soit $(x|y)$ une forme bilinéaire symétrique sur V, non dégénérée et invariante par W(R) (prop. 3). On a, d'après le lemme 2,

$$n(\alpha, \beta) = \frac{2(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}. \tag{7}$$

On en déduit que

$$n(\alpha, \beta) = 0 \Longleftrightarrow n(\beta, \alpha) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha|\beta) = 0 \Longleftrightarrow s_\alpha \text{ et } s_\beta \text{ sont permutables.} \tag{8}$$

$$\text{Si } (\alpha|\beta) \neq 0, \quad \text{on a} \quad \frac{n(\beta, \alpha)}{n(\alpha, \beta)} = \frac{(\beta|\beta)}{(\alpha|\alpha)}. \tag{9}$$

2. Somme directe de systèmes de racines

Soit V un espace vectoriel sur k, somme directe d'une famille $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de sous-espaces vectoriels. Identifions V^* à la somme directe des V_i^*. Pour tout i, soit R_i un système de racines dans V_i. Alors $R = \bigcup_i R_i$ est un système de racines dans V dont le système inverse est $R^\vee = \bigcup_i R_i^\vee$; la bijection canonique de R sur $R^\vee$ prolonge, pour tout i, la bijection canonique de R_i sur $R_i^\vee$. On dit que R est le *système de racines somme directe des* R_i. Soit $\alpha \in R_i$. Si $j \neq i$, le noyau de $\alpha^\vee$ contient V_j, donc s_α induit l'identité dans V_j; d'autre part, $k\alpha \subset V_i$, donc s_α laisse stable V_i. Ces remarques prouvent que W(R) *s'identifie à* $\prod_{i=1}^{r} W(R_i)$.

On dit qu'un système de racines R est *irréductible* si $R \neq \varnothing$ et si R n'est pas omme directe de deux systèmes de racines non vides.

Proposition 5. — *Soit V un espace vectoriel sur k, somme directe de sous-espaces vectoriels* $V_1, \ldots, V_r$. *Soit* R *un système de racines dans* V. *Posons* $R_i = R \cap V_i$. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *les* V_i *sont stables par* W(R);

(ii) $R \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$;

(iii) *pour tout* i, R_i *est un système de racines dans* V_i, *et* R *est somme directe des* R_i.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : ceci résulte de ce qu'on a dit au début de ce numéro.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : supposons les V_i stables par W(R). Soit $\alpha \in R$, et soit H le noyau de $\alpha^\vee$. D'après la prop. 3 du chap. V, § 2, nº 2, chaque V_i est somme d'un sous-espace de H et d'un sous-espace de $k\alpha$. Donc l'un des V_i contient $k\alpha$, d'où $\alpha \in V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : si la condition (ii) est remplie, R_i engendre V_i pour tout i, donc R_i est un système de racines dans V_i (prop. 4). Il est clair que R est la somme directe des R_i.

Corollaire. — *Soit* R *un système de racines dans* V. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) R *est irréductible*;

(ii) *le* W(R)*-module* V *est simple*;

(iii) *le* W(R)*-module* V *est absolument simple.*

(ii) $\Longleftrightarrow$ (i) : cela résulte de la prop. 5 et du th. de Maschke (chap. V, Annexe, prop. 2).

(iii) $\Longleftrightarrow$ (ii) : cela résulte de la prop. 1 du chap. V, § 2, nº 1.

Proposition 6. — *Tout système de racines* R *dans* V *est somme directe d'une famille* $(R_i)_{i \in I}$ *de systèmes de racines irréductibles, qui est bien déterminée à une bijection près sur l'ensemble d'indices.*

L'existence des R_i se démontre par récurrence sur Card R : si R est non vide et non irréductible, R est somme directe de deux systèmes de racines R', R'' tels que Card R' < Card R, Card R'' < Card R, et l'on applique l'hypothèse de récurrence à R' et R''. Pour prouver l'unicité, il suffit de prouver que, si R est somme directe de R' et R'', tout R_i est nécessairement contenu dans R' ou dans R''. Soient V', V'', V'_i, V''_i les sous-espaces vectoriels de V engendrés par R', R'', $R' \cap R_i$, $R'' \cap R_i$. Puisque la somme $V' + V''$ est directe, la somme $V'_i + V''_i$ est directe. On a $R_i \subset R' \cup R''$, donc R_i est somme directe des systèmes de racines $R' \cap R_i$ et $R'' \cap R_i$; d'où $R' \cap R_i = \varnothing$ ou $R'' \cap R_i = \varnothing$, ce qui établit notre assertion.

On dit que les R_i sont les *composants irréductibles* de R. Quels que soient les scalaires λ_i non nuls, la réunion des $\lambda_i R_i$ est un système de racines dans V, dont le système inverse est la réunion des $\lambda_i^{-1} R_i^\vee$, et dont le groupe de Weyl est W(R).

PROPOSITION 7. — *Soient* R *un système de racines dans* V, (R_i) *la famille de ses composants irréductibles,* V_i *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* R_i, B *la forme bilinéaire symétrique définie dans la prop.* 3, B' *une forme bilinéaire symétrique sur* V *invariante par* W(R). *Alors les* V_i *sont deux à deux orthogonaux pour* B', *et, pour tout* i, *les restrictions de* B *et* B' *à* V_i *sont proportionnelles.*

Si $v_i \in V_i$, $v_j \in V_j$, $i \neq j$, et si $w \in W(R_j)$, on a

$$B'(v_i, w(v_j)) = B'(v_i, v_j),$$

ce qui montre que $w(v_j) - v_j$ est orthogonal à v_i pour B'. Comme V_j est irréductible pour $W(R_j)$, il est engendré par les $w(v_j) - v_j$, et il est donc orthogonal à V_i.

Le fait que les restrictions de B et B' à chacun des V_i soient proportionnelles résulte de la prop. 1 du chap. V, § 2, n° 1.

Remarque. — Choisissons un produit scalaire sur $V_{\mathbf{R}}$ invariant par W(R). Cela permet de parler de la *longueur* d'une racine et de l'*angle* de deux racines. La prop. 7 montre que cet angle est indépendant du choix du produit scalaire, et qu'il en est de même du rapport des longueurs de deux racines, pourvu que celles-ci appartiennent à la *même* composante irréductible de R.

3. Relations entre deux racines

Rappelons que *l'on suppose désormais* $k = \mathbf{R}$. (Nous laissons au lecteur le soin d'étendre définitions et résultats au cas général, par la méthode indiquée dans la *Remarque* 2 du n° 1.)

Dans tout ce qui suit, R *désigne un système de racines dans un espace vectoriel* V; *on munit* V *d'un produit scalaire* $(x, y) \longmapsto (x|y)$ *invariant par* W(R), cf. prop. 3.

Soient $\alpha, \beta \in R$. D'après la formule (7) du nº 1, on a

$$n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) = 4\cos^2 (\widehat{\alpha, \beta}) \leqslant 4. \tag{10}$$

L'entier $n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha)$ ne peut donc prendre que les valeurs 0, 1, 2, 3, 4. Compte tenu du chap. V, § 2, nº 5, cor. de la prop. 6, et de la note de bas de page du chap. V, § 4, nº 8, on voit que les seules possibilités sont les suivantes, à l'échange près de α et β :

1) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 0$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{2}$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 2;

2) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 1$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{3}$; $||\alpha|| = ||\beta||$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 3;

3) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -1$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{2\pi}{3}$; $||\alpha|| = ||\beta||$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 3;

4) $n(\alpha, \beta) = 1, \quad n(\beta, \alpha) = 2$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{4}$; $||\beta|| = \sqrt{2}\,||\alpha||$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 4;

5) $n(\alpha, \beta) = -1, n(\beta, \alpha) = -2$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{3\pi}{4}$; $||\beta|| = \sqrt{2}\,||\alpha||$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 4;

6) $n(\alpha, \beta) = 1, \quad n(\beta, \alpha) = 3$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{6}$; $||\beta|| = \sqrt{3}\,||\alpha||$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 6;

7) $n(\alpha, \beta) = -1, n(\beta, \alpha) = -3$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{5\pi}{6}$; $||\beta|| = \sqrt{3}\,||\alpha||$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 6;

8) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 2$; $\alpha = \beta$;
9) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -2$; $\alpha = -\beta$;
10) $n(\alpha, \beta) = 1, \quad n(\beta, \alpha) = 4$; $\beta = 2\alpha$;
11) $n(\alpha, \beta) = -1, n(\beta, \alpha) = -4$; $\beta = -2\alpha$.

En particulier :

PROPOSITION 8. — (i) *Si deux racines sont proportionnelles, le facteur de proportionalité ne peut être que* ± 1, $\pm \frac{1}{2}$, ± 2.

(ii) *Si* α, β *sont deux racines non proportionnelles, et si* $||\alpha|| \leqslant ||\beta||$, *alors* $n(\alpha, \beta)$ *prend l'une des valeurs* 0, 1, -1.

Si une racine $\alpha \in R$ est telle que $\frac{1}{2}\alpha \notin R$, on dit que α est une racine *indivisible.*

THÉORÈME 1. — *Soient* α, β *deux racines.*

(i) *Si* $n(\alpha, \beta) > 0$, $\alpha - \beta$ *est une racine sauf si* $\alpha = \beta$.

(ii) *Si* $n(\alpha, \beta) < 0$, $\alpha + \beta$ *est une racine sauf si* $\alpha = -\beta$.

Si $n(\alpha, \beta) > 0$, les possibilités, d'après la liste ci-dessus, sont les suivantes :
1) $n(\alpha, \beta) = 1$; alors $\alpha - \beta = s_\beta(\alpha) \in R$;
2) $n(\beta, \alpha) = 1$; alors $\beta - \alpha = s_\alpha(\beta) \in R$, donc $\alpha - \beta \in R$;
3) $\beta = \alpha$.

Ceci prouve (i), et (ii) s'en déduit en changeant β en $-\beta$.

Corollaire. — *Soient* α *et* β *deux racines.*

(i) *Si* $(\alpha|\beta) > 0$, $\alpha - \beta$ *est une racine sauf si* $\alpha = \beta$.

(ii) *Si* $(\alpha|\beta) < 0$, $\alpha + \beta$ *est une racine sauf si* $\alpha = -\beta$.

(iii) *Si* $\alpha - \beta \notin \mathrm{R} \cup \{0\}$ *et* $\alpha + \beta \notin \mathrm{R} \cup \{0\}$, *on a* $(\alpha|\beta) = 0$.

Les assertions (i) et (ii) résultent du th. 1 et de la formule (7) du n° 1. L'assertion (iii) résulte de (i) et (ii).

Il peut se faire que $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$, $(\alpha|\beta) = 0$ (cf. planche X, système B_2). Lorsque $\alpha - \beta \notin \mathrm{R} \cup \{0\}$ et $\alpha + \beta \notin \mathrm{R} \cup \{0\}$, on dit que les racines α et β sont *fortement orthogonales.*

Proposition 9. — *Soient* α *et* β *deux racines non proportionnelles.*

(i) *L'ensemble* I *des entiers rationnels* j *tels que* $\beta + j\alpha$ *soit une racine est un intervalle* $[-q, p]$ *de* $\mathbf{Z}$ *contenant* 0.

(ii) *Soit* S *l'ensemble des* $\beta + j\alpha$ *pour* $j \in \mathrm{I}$. *Alors*

$$s_\alpha(\mathrm{S}) = \mathrm{S} \qquad \textit{et} \qquad s_\alpha(\beta + p\alpha) = \beta - q\alpha.$$

(iii) *On a* $p - q = -n(\beta, \alpha)$.

Il est clair que $0 \in \mathrm{I}$. Soit p (resp. $-q$) le plus grand (resp. le plus petit) élément de I. Si tous les entiers de $[-q, p]$ n'appartiennent pas à I, il existe deux entiers r, s dans $[-q, p]$ possédant les propriétés suivantes : $s > r+1$, $s \in \mathrm{I}$, $r \in \mathrm{I}$, $r + k \notin \mathrm{I}$ pour $1 \leqslant k \leqslant s - r - 1$. Avec les notations du cor. du th. 1, on a $(\alpha|\beta + s\alpha) \leqslant 0$, $(\alpha|\beta + r\alpha) \geqslant 0$, ce qui est absurde car

$$(\alpha|\beta + s\alpha) > (\alpha|\beta + r\alpha).$$

Ceci prouve (i).

On a $s_\alpha(\beta + j\alpha) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha - j\alpha = \beta + j'\alpha$ avec $j' = -j - n(\beta, \alpha)$. Donc $s_\alpha(\mathrm{S}) \subset \mathrm{S}$ et par suite $s_\alpha(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$. En outre on voit que l'application $j \longmapsto -j - n(\beta, \alpha)$ est une bijection décroissante de I sur I. On en déduit que, pour $j = p$, on a $j' = -q$, de sorte que $-q = -p - n(\beta, \alpha)$. Ceci prouve (ii) et (iii).

On dit que S est la *α-chaîne de racines* définie par β, que $\beta - q\alpha$ est *l'origine* de la chaîne et $\beta + p\alpha$ son *extrémité*, et que $p + q$ est sa *longueur.*

Corollaire. — *Soient* S *une α-chaîne de racines,* γ *l'origine de* S. *La longueur de* S *est* $-n(\gamma, \alpha)$ *; elle est égale à* 0, 1, 2 *ou* 3.

La première assertion résulte de la prop. 9, (iii), appliquée à $\beta = \gamma$, compte tenu de ce que $p = 0$.

D'autre part, comme γ n'est pas proportionnelle à α, la liste donnée au début de ce n° montre que $|n(\gamma, \alpha)| \leqslant 3$, d'où le corollaire.

Remarque. — Gardons les notations du corollaire ci-dessus. Alors :

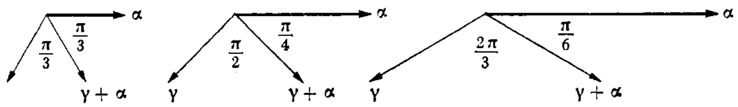
1) Si la longueur de S est 0, on a $(\alpha|\gamma) = 0$.

2) Si la longueur de S est 1, on a $n(\gamma, \alpha) = -1$, d'où trois cas :

$$n(\alpha, \gamma) = -1, \quad (\alpha|\alpha) = (\gamma|\gamma), \quad (\alpha|\gamma) = -\frac{1}{2}(\alpha|\alpha), \quad \widehat{(\alpha, \gamma)} = \frac{2\pi}{3}$$

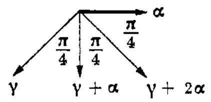
$$n(\alpha, \gamma) = -2, \quad (\alpha|\alpha) = 2(\gamma|\gamma), \quad (\alpha|\gamma) = -\frac{1}{2}(\alpha|\alpha), \quad \widehat{(\alpha, \gamma)} = \frac{3\pi}{4}$$

$$n(\alpha, \gamma) = -3, \quad (\alpha|\alpha) = 3(\gamma|\gamma), \quad (\alpha|\gamma) = -\frac{1}{2}(\alpha|\alpha), \quad \widehat{(\alpha, \gamma)} = \frac{5\pi}{6}$$



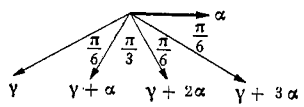
3) Si la longueur de S est 2, on a $n(\gamma, \alpha) = -2$, d'où

$$n(\alpha, \gamma) = -1, \quad (\alpha|\alpha) = \frac{1}{2}(\gamma|\gamma), \quad (\alpha|\gamma) = -(\alpha|\alpha), \quad \widehat{(\alpha, \gamma)} = \frac{3\pi}{4}.$$



4) Si la longueur de S est 3, on a $n(\gamma, \alpha) = -3$, d'où

$$n(\alpha, \gamma) = -1, \quad (\alpha|\alpha) = \frac{1}{3}(\gamma|\gamma), \quad (\alpha|\gamma) = -\frac{3}{2}(\alpha|\alpha), \quad \widehat{(\alpha, \gamma)} = \frac{5\pi}{6}.$$



Nous verrons (planche X, systèmes A_2, B_2, G_2) que tous ces cas peuvent effectivement se présenter.

PROPOSITION 10. — *Soient α, β deux racines non proportionnelles telles que $\beta+\alpha$ soit une racine. Soient p, q les entiers de la prop.* 9. *On a*

$$\frac{(\beta + \alpha|\beta + \alpha)}{(\beta|\beta)} = \frac{q+1}{p}.$$

Soient S la α-chaîne définie par β, γ son origine; sa longueur l est $\geqslant 1$ puisque $\beta + \alpha$ est une racine. On peut avoir les cas suivants :

1) $l = 1$; alors $\beta = \gamma$, $q = 0$, $p = 1$, $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = (\beta|\beta)$.

2) $l = 2$, $\beta = \gamma$; alors $q = 0$, $p = 2$, $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = \frac{1}{2}(\beta|\beta)$.

3) $l = 2$, $\beta = \gamma + \alpha$; alors $q = 1$, $p = 1$, $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = 2(\beta|\beta)$.

4) $l = 3$, $\beta = \gamma$; alors $q = 0$, $p = 3$, $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = \frac{1}{3}(\beta|\beta)$.

5) $l = 3$, $\beta = \gamma + \alpha$; alors $q = 1$, $p = 2$, $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = (\beta|\beta)$.

6) $l = 3$, $\beta = \gamma + 2\alpha$; alors $q = 2$, $p = 1$, $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = 3(\beta|\beta)$.

Dans tous les cas, la formule à établir est vérifiée.

PROPOSITION 11. — *Supposons* R *irréductible. Soient* α *et* β *deux racines telles que* $\|\alpha\| = \|\beta\|$. *Il existe* $g \in W(R)$ *tel que* $g(\alpha) = \beta$.

Les transformés de α par $W(R)$ engendrent V (n° 2, cor. de la prop. 5). Il existe donc $g \in W(R)$ tel que $(g(\alpha)|\beta) \neq 0$. On peut ainsi supposer désormais que $(\alpha|\beta) \neq 0$. D'après la formule (9) du n° 1, $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha)$. Remplaçant éventuellement β par $s_\beta(\beta) = -\beta$, on peut supposer $n(\alpha, \beta) > 0$. Alors, d'après la liste du début du n° 3, ou bien $\alpha = \beta$ (auquel cas la proposition est évidente), ou bien $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 1$; dans ce cas

$$(s_\alpha s_\beta s_\alpha)(\beta) = s_\alpha s_\beta(\beta - \alpha) = s_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha.$$

4. Systèmes de racines réduits

On dit qu'un système de racines est *réduit* si toute racine du système est indivisible (n° 3).

PROPOSITION 12. — *Supposons* R *irréductible et réduit.*

(i) *Le rapport* $\dfrac{(\beta|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$ *pour* $\alpha \in R$, $\beta \in R$ *ne peut prendre que les valeurs* $1, 2, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{3}$.

(ii) *L'ensemble des* $(\alpha|\alpha)$ *pour* $\alpha \in R$ *a au plus deux éléments.*

Comme R est irréductible, les transformés d'une racine par $W(R)$ engendrent V (n° 2, cor. de la prop. 5). Quelles que soient les racines α, β, il existe donc une racine β' telle que $(\alpha|\beta') \neq 0$ et $(\beta'|\beta') = (\beta|\beta)$. D'après la formule (9) du n° 1 et la liste du n° 3, $\dfrac{(\beta'|\beta')}{(\alpha|\alpha)}$ prend l'une des valeurs $1, 2, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{3}$ (rappelons que le système est supposé réduit). En multipliant $(x|y)$ par un scalaire convenable, on peut supposer que $(\alpha|\alpha) = 1$ pour certaines racines et que les autres valeurs possibles de $(\beta|\beta)$ pour $\beta \in R$ sont 2 et 3. Les valeurs 2 et 3 ne peuvent être atteintes toutes les deux, car il existerait $\beta \in R$, $\gamma \in R$ tels que $\dfrac{(\gamma|\gamma)}{(\beta|\beta)} = \dfrac{3}{2}$, contrairement à ce qu'on a vu plus haut.

PROPOSITION 13. — *Supposons* R *irréductible, non réduit et de rang* $\geqslant 2$.

(i) *L'ensemble* R_0 *des racines indivisibles est un système de racines dans* V; *ce système est irréductible et réduit; on a* $W(R_0) = W(R)$.

(ii) *Soit* A *l'ensemble des racines* α *pour lesquelles* $(\alpha|\alpha)$ *prend la plus petite valeur* λ. *Alors deux éléments non proportionnels de* A *sont orthogonaux.*

(iii) *Soit* B *l'ensemble des* $\beta \in R$ *tels que* $(\beta|\beta) = 2\lambda$. *On a* $B \neq \emptyset$, $R_0 = A \cup B$, $R = A \cup B \cup 2A$.

Si $\alpha \in R - R_0$, on a $\frac{1}{2}\alpha \in R$, mais $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\alpha) \notin R$ (prop. 8), donc $\frac{1}{2}\alpha \in R_0$. Ceci prouve que R_0 vérifie (SR_I). Il est clair que, pour tout $\alpha \in R$, on a $s_{\alpha,\alpha^\vee}(R_0) = R_0$, donc R_0 vérifie (SR_{II}) et (SR_{III}). Comme $\alpha \in R - R_0$ implique $\frac{1}{2}\alpha \in R_0$ et que $s_\alpha = s_{\alpha/2}$, on a $W(R) = W(R_0)$. Donc R_0 est irréductible (cor. de la prop. 5), et est évidemment réduit.

Comme R est non réduit, il existe $\alpha \in R_0$ tel que $2\alpha \in R$. Comme R_0 est irréductible et que $\dim V \geqslant 2$, il n'est pas possible que α soit proportionnel ou orthogonal à toute racine. Soit $\beta \in R_0$ tel que $n(\beta, \alpha) \neq 0$ et que β soit non proportionnel à α. En changeant β en $-\beta$, on peut supposer $n(\beta, \alpha) > 0$. On a $\frac{1}{2}n(\beta, \alpha) = n(\beta, 2\alpha) \in \mathbf{Z}$, donc $n(\beta, \alpha) \in 2\mathbf{Z}$. D'après la liste du n° 3, on a $n(\beta, \alpha) = 2$, $(\beta|\beta) = 2(\alpha|\alpha)$. Comme R_0 est réduit, la prop. 12 montre que, pour tout $\gamma \in R_0$, on a $(\gamma|\gamma) = (\alpha|\alpha)$ ou $(\gamma|\gamma) = 2(\alpha|\alpha)$. Et ce qui précède montre que, pour tout $\gamma \in R - R_0$, le vecteur $\frac{1}{2}\gamma$ est un élément de R_0 tel que $(\frac{1}{2}\gamma|\frac{1}{2}\gamma) = (\alpha|\alpha)$. Ainsi, $\lambda = (\alpha|\alpha)$, $B \neq \emptyset$, $R_0 = A \cup B$, et $R \subset A \cup B \cup 2A$; d'autre part, si $\gamma \in A$, il existe $g \in W(R)$ tel que $\gamma = g(\alpha)$ (prop. 11), d'où $2\gamma = g(2\alpha) \in R$; donc $2A \subset R$ et $R = A \cup B \cup 2A$. Enfin, soient γ, γ' deux éléments non proportionnels de A. On a

$$n(2\gamma, \gamma') = 2n(\gamma, \gamma') = 4n(\gamma, 2\gamma') \in 4\mathbf{Z}, \qquad \text{et} \qquad |n(\gamma, \gamma')| \leqslant 1$$

puisque γ et γ' ont même longueur, d'où $n(\gamma, \gamma') = 0$ et $(\gamma|\gamma') = 0$.

PROPOSITION 14. — *Supposons que* R *soit irréductible et réduit, et que* $(\alpha|\alpha)$ *prenne les valeurs* λ *et* 2λ *pour* $\alpha \in R$. *Soit* A *l'ensemble des racines* α *telles que* $(\alpha|\alpha) = \lambda$. *On suppose que deux éléments de* A *non proportionnels sont orthogonaux. Alors* $R_1 = R \cup 2A$ *est un système de racines irréductible non réduit et* R *est l'ensemble des racines indivisibles de* R_1.

Il est clair que R_1 vérifie (SR_I) et (SR_{II}). Soient $\alpha, \beta \in R_1$ et montrons que $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \mathbf{Z}$. C'est évident si $\alpha, \beta \in R$. Comme $(2\alpha)^\vee = \frac{1}{2}\alpha^\vee$ pour $\alpha \in A$, c'est encore immédiat si $\alpha, \beta \in 2A$. Enfin, supposons $\beta \in R$ et $\alpha = 2\gamma$ avec $\gamma \in A$.

1) Si $\gamma = \pm\beta$, on a $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = \pm\frac{1}{2}\langle \gamma^\vee, \gamma \rangle = \pm 1$.

2) Si γ est non proportionnel à β et si $\beta \in A$, l'hypothèse faite sur A entraîne que $\langle \gamma^\vee, \beta \rangle = 0$, d'où $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = 0$.

3) Si $\beta \in R - A$, on a $(\beta|\beta) = 2\lambda = 2(\gamma|\gamma)$, donc $\langle \beta, \gamma^\vee \rangle$ est égal soit à 0, soit à 2, soit à -2 d'après la liste du n° 3. Donc $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \frac{1}{2}\langle \beta, \gamma^\vee \rangle \in \mathbf{Z}$.

Ainsi, R_1 est un système de racines dans V, et les autres assertions sont évidentes.

5. Chambres et bases d'un système de racines

Pour tout $\alpha \in R$, soit L_α l'hyperplan de V formé des points invariants par s_α. Les chambres déterminées dans V par l'ensemble des L_α (chap. V, § 1, n° 3) s'appellent les *chambres* de R. La bijection $V \to V^*$ définie par le produit scalaire $(x|y)$ transforme α en $\dfrac{2\alpha^\vee}{(\alpha^\vee|\alpha^\vee)}$ pour $\alpha \in R$, donc L_α en $L_{\alpha^\vee}$, donc les chambres de R en celles de $R^\vee$. Si C est une chambre de R, nous noterons $C^\vee$ la chambre correspondante de $R^\vee$. D'après la prop. 7 du n° 2, $C^\vee$ dépend uniquement de C, et non du choix de $(x|y)$.

THÉORÈME 2. — (i) *Le groupe* W(R) *opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des chambres.*

(ii) *Soit* C *une chambre. Alors* $\overline{C}$ *est un domaine fondamental pour* W(R).

(iii) C *est un cône simplicial ouvert* (chap. V, § 1, n° 6).

(iv) *Soient* $L_1, L_2, \ldots, L_l$ *les murs de* C. *Pour tout* i, *il existe une racine indivisible* α_i *et une seule telle que* $L_i = L_{\alpha_i}$ *et telle que* α_i *soit du même côté de* L_i *que* C.

(v) *L'ensemble* $B(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *est une base de* V.

(vi) C *est l'ensemble des* $x \in V$ *tels que* $\langle \alpha_i^\vee, x\rangle > 0$ *pour tout* i (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des $x \in V$ tels que $(x|\alpha_i) > 0$ pour tout i).

(vii) *Soit* S *l'ensemble des* s_{α_i}. *Le couple* (W(R), S) *est un système de Coxeter* (chap. IV, § 1, n° 3).

Les assertions (i) et (vii) résultent du chap. V, § 3, n° 2, th. 1. L'assertion (ii) résulte du chap. V, § 3, n° 3, th. 2. L'assertion (iv) est évidente. La racine α_i est orthogonale à L_i, et $\alpha_i^\vee$ s'identifie à $2\alpha_i/(\alpha_i|\alpha_i)$. Comme W(R) est essentiel (n° 1, *Remarque* 3), les assertions (iii), (v), (vi) résultent du chap. V, § 3, n° 9, prop. 7.

Remarques. — 1) L'assertion (vii) montre en particulier que W(R) est *engendré* par les réflexions s_{α_i}.

2) Si $x, y \in C$, on a $(x|y) < 0$ (chap. V, § 3, n° 5, lemme 6), autrement dit l'angle $\widehat{(x, y)}$ est *aigu*.

3) Soit $m(\alpha, \beta)$ l'ordre de $s_\alpha s_\beta$ ($\alpha, \beta \in B(C)$). La matrice $(m(\alpha, \beta))$ s'identifie à la *matrice de Coxeter* (chap. IV, § 1, n° 9) de (W, S). Si $\alpha \neq \beta$, la prop. 3 du chap. V, § 3, n° 4, montre que l'angle $\widehat{(\alpha, \beta)}$ est égal à $\pi - \dfrac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$; en particulier, cet angle est obtus ou droit, et l'on a $(\alpha|\beta) \leqslant 0$. En utilisant la liste du n° 3, *on voit que* $m(\alpha, \beta)$ *est égal à* 2, 3, 4 *ou* 6.

DÉFINITION 2. — *Une partie* B *de* R *est appelée une base de* R *s'il existe une chambre* C *de* R *telle que* B = B(C). *Si* C *est une chambre, on dit que* B(C) *est la base de* R *définie par* C.

Remarques. — 4) L'assertion (vi) du th. 2 montre que l'application $C \longmapsto B(C)$ est une *bijection* de l'ensemble des chambres sur l'ensemble des bases. Par suite, $W(R)$ opère de manière *simplement transitive* sur l'ensemble des bases.

5) Soit C une chambre de R, et soit B la base correspondante. Si $\alpha \in B$, posons $\varphi(\alpha) = \alpha^\vee$ si $2\alpha \notin R$ et $\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^\vee$ si $2\alpha \in R$. Alors $\varphi(B)$ *est la base de* $R^\vee$ *définie par* $C^\vee$; cela résulte du fait que les murs de $C^\vee$ sont les $L_{\alpha^\vee}$, pour $\alpha \in B$.

Définition 3. — *Soit* B *une base de* R. *On appelle matrice de Cartan de* R (*relativement à* B) *la matrice* $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in B}$.

On a $n(\alpha, \alpha) = 2$ pour tout $\alpha \in B$. Pour $\alpha, \beta \in B$, on a

$$n(\alpha, \beta) = 2\,\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} = -2\,\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\cos\frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}, \tag{11}$$

où $m(\alpha, \beta)$ désigne comme précédemment l'ordre de $s_\alpha s_\beta$. Si $\alpha \neq \beta$, on a $n(\alpha, \beta) = 0, -1, -2$ ou -3 (cf. n° 3).

Remarques. — 6) On ne confondra pas la matrice de Cartan $(n(\alpha, \beta))$ et la matrice de Coxeter $(m(\alpha, \beta))$. Noter d'ailleurs que la matrice de Cartan n'est pas nécessairement symétrique.

7) *Indexations canoniques.* Si B et B′ sont deux bases de R, il existe un unique élément $w \in W$ tel que $w(B) = B'$. On a

$$n(w(\alpha), w(\beta)) = n(\alpha, \beta) \qquad \text{et} \qquad m(w(\alpha), w(\beta)) = m(\alpha, \beta)$$

pour $\alpha, \beta \in B$. Par suite, les matrices de Cartan et de Coxeter associées à B se déduisent de celles associées à B′ par composition avec la bijection

$$\alpha \longmapsto w(\alpha)$$

de B sur B′.

On peut d'ailleurs définir des matrices de Cartan et de Coxeter *canoniques* de la manière suivante. Soit X l'ensemble des couples (B, α), où B est une base de R et où $\alpha \in B$. Le groupe W opère de manière évidente sur X et une orbite de W dans X rencontre chacun des ensembles $\{B\} \times B$ en un point et un seul. Si I est l'ensemble de ces orbites, chaque base B admet donc une *indexation canonique* $(\alpha_i)_{i \in I}$. De plus, il existe une matrice $N = (n_{ij})$ (resp. $M = (m_{ij})$) et une seule, de type $I \times I$, telle que pour toute base B, la matrice de Cartan (resp. de Coxeter) associée à B se déduise de N (resp. M) par composition avec l'indexation canonique de B; on l'appelle la *matrice de Cartan* (resp. *de Coxeter*) *canonique* de R.

Proposition 15. — *Soient* B *une base de* R *et* α *une racine indivisible. Il existe* $\beta \in B$ *et* $w \in W(R)$ *tels que* $\alpha = w(\beta)$.

Soit C la chambre telle que $B = B(C)$. L'hyperplan L_α est mur d'une chambre C' de R, et il existe un élément de W(R) qui transforme C' en C. On est donc ramené au cas où L_α est mur de C. Alors α est proportionnel à un élément β de B. Comme α et β sont indivisibles, on a $\alpha = \pm\, \beta$. Si $\alpha = -\beta$, on a $\alpha = s_\beta(\beta)$, d'où la proposition.

Corollaire. — *Soient* R_1 *et* R_2 *deux systèmes de racines réduits dans des espaces vectoriels* V_1 *et* V_2, *et soient* B_1 *et* B_2 *des bases de* R_1 *et* R_2. *Soit* $f : B_1 \rightarrow B_2$ *une bijection qui transforme la matrice de Cartan de* R_1 *en celle de* R_2. *Il existe alors un isomorphisme* $F : V_1 \rightarrow V_2$ *qui transforme* R_1 *en* R_2 *et* α *en* $f(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in B_1$.

Soit F l'isomorphisme de V_1 sur V_2 qui transforme α en $f(\alpha)$ pour tout $\alpha \in B_1$. Alors F transforme s_α en $s_{f(\alpha)}$, donc $W(R_1)$ en $W(R_2)$ (th. 2), donc R_1 en R_2 (prop. 15).

Proposition 16. — *Soient* B *une base de* R, *et* G *le sous-groupe de* A(R) *formé des éléments laissant stable* B. *Alors* W(R) *est un sous-groupe distingué de* A(R) *et* A(R) *est produit semi-direct de* G *et* W(R).

Si $\alpha \in R$ et $t \in A(R)$, on a $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$; comme W(R) est engendré par les s_α, on voit que W(R) est un sous-groupe distingué de A(R). Par transport de structure, A(R) transforme une base de R en une base de R. Comme W(R) opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des bases, tout élément de A(R) s'écrit de manière unique sous la forme $g_1 g_2$, où $g_1 \in W(R)$ et $g_2 \in G$.

Remarques. — 8) Soient $R_1, \ldots, R_p$ des systèmes de racines dans les espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_p$, R la somme directe des R_i dans $V = \prod_i V_i$, C_i une chambre de R_i, $B_i = B(C_i)$. Il est immédiat que $C = \prod_i C_i$ est une chambre de R et que $B(C) = \bigcup_i B_i$. Il résulte du th. 2 que les chambres et les bases de R sont toutes obtenues par ce procédé.

6. Racines positives

Soit C une chambre de R, et soit $B(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ la base de R correspondante. On appelle *relation d'ordre définie par* C dans V (resp. V*) la relation d'ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel de V (resp. V*) pour laquelle les éléments $\geqslant 0$ sont les combinaisons linéaires des α_i (resp. des $\alpha_i^\vee$) à coefficients $\geqslant 0$. On dira qu'un élément positif pour l'une de ces relations d'ordre est *positif pour* C, ou *positif pour la base* B(C). Ces relations d'ordre sont aussi définies par $C^\vee$, comme on le voit en identifiant V à V* à l'aide d'un produit scalaire invariant par W(R). Compte tenu du th. 2, n° 5, un élément de V* est $\geqslant 0$ si et seulement si ses valeurs sur C sont $\geqslant 0$. Un élément x de V est $\geqslant 0$ si et seulement si ses valeurs sur $C^\vee$ sont $\geqslant 0$, ou, ce qui revient au même, si $(x|y) \geqslant 0$ pour tout $y \in C$.

Les éléments de $\overline{C}$ sont $\geqslant 0$ pour C d'après le lemme 6 du chap. V, § 3, n° 5. Mais l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ pour C est en général distinct de $\overline{C}$ (cf. planche X, systèmes A_2, B_2, G_2).

THÉORÈME 3. — *Toute racine est combinaison linéaire à coefficients entiers de même signe d'éléments de* B(C). *En particulier, toute racine est, soit positive, soit négative, pour* C.

Si $\alpha \in R$, le noyau L_α de α ne rencontre pas $C^\vee$, donc α est, soit > 0 sur $C^\vee$ tout entier, soit < 0 sur $C^\vee$ tout entier, d'où la deuxième assertion. Il reste à prouver que α est contenu dans le *sous-groupe* P de V engendré par B(C); on peut supposer α indivisible. Or le groupe P est évidemment stable par les s_γ, pour $\gamma \in B(C)$, donc aussi par W(R) d'après le th. 2. Comme α est de la forme $w(\beta)$, avec $w \in W(R)$ et $\beta \in B(C)$ (cf. prop. 15), on a bien $\alpha \in P$. C.Q.F.D.

On notera $R_+(C)$ l'ensemble des racines positives pour C. Ainsi,

$$R = R_+(C) \cup (-R_+(C))$$

est une partition de R.

COROLLAIRE. — *Soient γ une combinaison linéaire de racines à coefficients entiers, et α une racine indivisible. Si γ est proportionnelle à α, alors $\gamma \in \mathbf{Z}\alpha$.*

D'après la prop. 15 du n° 5, on peut choisir C de telle sorte que $\alpha \in B(C)$. D'après le th. 3, on a :

$$\gamma = \sum_{\beta \in B(C)} n_\beta \beta, \qquad \text{avec} \qquad n_\beta \in \mathbf{Z}.$$

Si γ est proportionnel à α, on a donc $\gamma = n_\alpha \alpha$, ce qui démontre le corollaire.

Soit maintenant S l'ensemble des réflexions s_α pour $\alpha \in B(C)$ et soit T la réunion des conjugués de S dans W. Pour $\alpha \in B(C)$ et $w \in W$, l'élément $t = ws_\alpha w^{-1}$ de T est la réflexion orthogonale s_β associée à la racine $\beta = w(\alpha)$; réciproquement, pour toute racine indivisible β, il existe un élément $w \in W$ tel que $\alpha = w^{-1}(\beta) \in B(C)$ (prop. 15) et on a $s_\beta = ws_\alpha w^{-1} \in T$. Il en résulte que l'on obtient une *bijection* ψ de l'ensemble des racines indivisibles sur $\{\pm 1\} \times T$ en associant à une racine indivisible β le couple (ε, s_β), où $\varepsilon = +1$ si β est positive et $\varepsilon = -1$ si β est négative.

D'autre part, (W, S) est un système de Coxeter (th. 2) et on peut lui appliquer les résultats du chap. IV, § 1, n° 4. Nous avons vu que, si w est un élément de W de longueur (par rapport à S) égale à q, il existe une partie T_w de T, à q éléments, telle que, si $w = s_1 \ldots s_q$ avec $s_i \in S$ et si l'on pose

$$t_i = s_1 \ldots s_{i-1} s_i s_{i-1} \ldots s_1$$

(pour $1 \leqslant i \leqslant q$), alors $T_w = \{t_1, \ldots, t_q\}$. Rappelons que l'on a également défini au n° 4 du § 1 du chap. IV un nombre $\eta(w, t)$ (pour $w \in W$ et $t \in T$) égal à $+1$ si $t \notin T_w$ et à -1 si $t \in T_w$. Enfin, rappelons que, si l'on définit l'application U_w de l'ensemble $\{\pm 1\} \times T$ dans lui-même par la formule

$$U_w(\varepsilon, t) = (\varepsilon\eta(w^{-1}, t), wtw^{-1}),$$

l'application $w \longmapsto U_w$ est un *homomorphisme* de W dans le groupe des permutations de l'ensemble $\{\pm 1\} \times T$ (chap. IV, § 1, n° 4, lemme 1).

PROPOSITION 17. — *Supposons* R *réduit et soient* $w \in W$ *et* $\alpha \in R$.

(i) *On a* $\psi(w(\alpha)) = U_w(\psi(\alpha))$.

(ii) *Supposons* α *positive. La racine* $w(\alpha)$ *est négative si et seulement si*

$$\eta(w^{-1}, s_\alpha) = -1,$$

autrement dit si $s_\alpha \in T_{w^{-1}}$.

(iii) *On a* $\eta(w, s_\alpha) = -1$ *si et seulement si les chambres* C *et* $w(C)$ *sont de part et d'autre de l'hyperplan* L_α. *Autrement dit, l'ensemble* T_w *se compose des réflexions par rapport aux murs séparant* C *et* $w(C)$.

Soit $\beta \in B(C)$ et posons $s = s_\beta$. On a évidemment $T_s = \{s\}$ et par suite :

$$(12) \qquad U_s(\varepsilon, t) = \begin{cases} (\varepsilon, sts^{-1}) & \text{si } t \neq s \\ (-\varepsilon, s) & \text{si } t = s. \end{cases}$$

D'autre part, soit $\rho = \sum_{\gamma \in B(C)} n_\gamma(\rho)\gamma$ une racine positive. Posons

$$s(\rho) = \sum_{\gamma \in B(C)} n_\gamma(s(\rho))\gamma.$$

Si $\rho \neq \beta$, il existe un élément $\gamma \in B(C)$ avec $\gamma \neq \beta$, tel que $n_\gamma(\rho) > 0$, et l'on a $n_\gamma(s(\rho)) = n_\gamma(\rho) > 0$ (n° 1, formule (5)). Par suite $s(\rho)$ est *positive*. On en déduit aussitôt que :

$$(13) \qquad \psi(s(\varepsilon.\rho)) = \begin{cases} (\varepsilon, ss_\rho s^{-1}) & \text{si } \rho \neq \beta \\ (-\varepsilon, s) & \text{si } \rho = \beta. \end{cases}$$

La comparaison de (12) et de (13) montre alors que $U_s(\psi(\gamma)) = \psi(s(\gamma))$ pour toute racine γ et tout $s \in S$. Comme S engendre W, on en déduit (i).

D'autre part, dire que $w(\alpha)$ est négative équivaut à dire que

$$\psi(w(\alpha)) = (-1, ws_\alpha w^{-1}),$$

ou encore d'après (i), que $U_w(\psi(\alpha)) = (-1, ws_\alpha w^{-1})$. Si de plus α est positive, on a $\psi(\alpha) = (+1, s_\alpha)$ et $U_w(\psi(\alpha)) = (\eta(w^{-1}, s_\alpha), ws_\alpha w^{-1})$, d'où (ii).

Enfin, on a, d'après (ii), $\eta(w, s_\alpha) = -1$ si et seulement si les racines α et $w^{-1}(\alpha)$ sont l'une positive et l'autre négative. Ceci équivaut à dire que $(\alpha|x).(w^{-1}(\alpha)|x) = (\alpha|x).(\alpha|w(x)) < 0$ pour tout $x \in C$, d'où la première assertion de (iii). La seconde assertion de (iii) en résulte immédiatement.

COROLLAIRE 1. — *Soient* $\beta \in B(C)$. *La réflexion* s_β *permute entre elles les racines positives non proportionnelles à* β.

On se ramène aussitôt au cas où R est réduit. Dans ce cas, notre assertion résulte de (ii) et du fait que $T_{s_\beta} = \{s_\beta\}$.

COROLLAIRE 2. — *Supposons* R *réduit. Soit* $w \in W$, *soit* q *la longueur de* w *par rapport à* S (chap. IV, § 1, n° 1), *et soit* $w = s_1 \ldots s_q$ *une décomposition réduite de* w. *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ *les éléments de* B(C) *correspondant à* $s_1, \ldots, s_q$. *Posons :*

$$\theta_i = s_q s_{q-1} \ldots s_{i+1}(\alpha_i), \qquad i = 1, \ldots, q.$$

Les racines θ_i *sont* > 0, *deux à deux distinctes, on a* $w(\theta_i) < 0$, *et toute racine* $\alpha > 0$ *telle que* $w(\alpha) < 0$ *est égale à l'une des* θ_i.

Soit X l'ensemble des racines $\alpha > 0$ telles que $w(\alpha) < 0$. D'après (ii), on a

$$\text{Card}\,(X) = \text{Card}\,(T_{w^{-1}}) = l(w^{-1}) = l(w) = q.$$

D'autre part, si $\alpha \in X$, il est clair qu'il existe $i \in [1, q]$ tel que

$$s_{i+1} \ldots s_q(\alpha) > 0 \qquad \text{et} \qquad s_i s_{i+1} \ldots s_q(\alpha) < 0.$$

D'après le cor. 1, cela entraîne $s_{i+1} \ldots s_q(\alpha) = \alpha_i$, d'où $\alpha = \theta_i$. L'ensemble X est donc contenu dans l'ensemble des θ_i. Puisque Card (X) $= q$, ceci n'est possible que si X est égal à l'ensemble des θ_i, et si ceux-ci sont deux à deux distincts. D'où le corollaire.

COROLLAIRE 3. — *Supposons* R *réduit. Il existe dans* W *un unique élément* w_0 *de plus grande longueur. Sa longueur est égale au nombre des racines positives et* w_0 *transforme la chambre* C *en* — C. *On a* $w_0^2 = 1$ *et* $l(ww_0) = l(w_0) - l(w)$ *pour tout* $w \in W$.

Il est clair que — C est une chambre. Il existe donc un unique élément w_0 de W qui transforme C en — C. On a alors $w_0(\alpha) < 0$ pour toute racine positive α et les deux premières assertions du cor. 3 sont des conséquences immédiates du cor. 2. On a $w_0^2(C) = C$, d'où $w_0^2 = 1$. Enfin, si $w \in W$, la longueur $l(w)$ (resp. $l(ww_0)$) est égale, d'après la prop. 17 (iii), au nombre de murs séparant C et $w(C)$ (resp. $ww_0(C) = -w(C)$). Comme $w(C)$ et $-w(C)$ sont de part et d'autre de n'importe quel mur, la somme $l(w) + l(ww_0)$ est égale au nombre total de murs, c'est-à-dire à $l(w_0)$.

PROPOSITION 18. — *Soit* $x \in V$. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $x \in \overline{C}$.

(ii) $x \geqslant s_\alpha(x)$ *pour tout* $\alpha \in B(C)$ (au sens de la relation d'ordre définie par C).

(iii) $x \geqslant w(x)$ *pour tout* $w \in W$.

Comme $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$ et que $\overline{C}$ est l'ensemble des éléments $x \in V$ tels que $\langle x, \alpha^\vee \rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in B(C)$, l'équivalence de (i) et (ii) est évidente. D'autre part, il est clair que (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $x \in \overline{C}$, et soit $w \in W$. Raisonnons par récurrence sur la longueur $l(w)$ de w. Le cas $l(w) = 0$ est trivial. Si $l(w) \geqslant 1$, on peut écrire w sous la forme $w = w' s_\alpha$, avec $\alpha \in B(C)$ et $l(w') = l(w) - 1$. On a alors

$$x - w(x) = x - w'(x) + w'(x - s_\alpha(x)).$$

L'hypothèse de récurrence montre que $x - w'(x)$ est positif. D'autre part, on a

$$w'(x - s_\alpha(x)) = w(s_\alpha(x) - x) = -\langle x, \alpha^\vee \rangle w(\alpha).$$

Or $s_\alpha \in T_{w^{-1}}$, et la prop. 17, (ii) montre que $w(\alpha) < 0$. D'où le résultat.

COROLLAIRE. — *Pour que $x \in C$, il faut et il suffit que $x > w(x)$ pour tout $w \in W$ tel que $w \neq 1$.*

PROPOSITION 19. — *Soit $(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de racines positives pour la chambre C telle que $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$ soit une racine. Il existe alors une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\beta_{\pi(1)} + \beta_{\pi(2)} + \cdots + \beta_{\pi(i)}$ soit une racine.*

Raisonnons par récurrence sur n, la proposition étant évidente pour $n \leqslant 2$. Posons $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_n$. On a $\sum_{i=1}^{n} (\beta|\beta_i) = (\beta|\beta) > 0$, donc il existe un indice k tel que $(\beta|\beta_k) > 0$. Si $\beta = \beta_k$, on a $n = 1$ puisque $\beta_i > 0$ pour tout i. Sinon, $\beta - \beta_k$ est une racine (n° 3, cor. du th. 1); il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\beta - \beta_k = \sum_{i \neq k} \beta_i$.

COROLLAIRE 1. — *Soit $\alpha \in R_+(C)$. Pour que $\alpha \notin B(C)$, il faut et il suffit que α soit somme de deux racines positives.*

Si α est somme de deux racines positives, le th. 3 montre que $\alpha \notin B(C)$. Si $\alpha \notin B(C)$, le th. 3 montre que $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$ avec $\beta_k \in B(C)$ pour tout k et $n \geqslant 2$. En permutant les β_k, on peut supposer que $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$ est une racine (prop. 19), donc α est somme des racines positives $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$ et β_n.

COROLLAIRE 2. — *Soit φ une application de R dans un groupe commutatif Γ possédant les propriétés suivantes :*

1) $\varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha)$ *pour* $\alpha \in R$;

2) *si* $\alpha \in R$, $\beta \in R$ *sont tels que* $\alpha + \beta \in R$, *on a* $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$.

Soit Q le sous-groupe de V engendré par R. Alors φ se prolonge en un homomorphisme de Q dans Γ.

Soit B une base de R. Soit ψ l'unique homomorphisme de Q dans Γ qui coïncide avec φ sur B. Il suffit de montrer que $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ quand α est une racine positive pour B. On a $\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_m$ avec $\beta_i \in B$ pour tout i, et $\beta_1 + \cdots + \beta_h \in R$ pour tout h (prop. 19). Montrons que $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ par récurrence sur m. C'est évident si $m = 1$. L'hypothèse de récurrence donne

$$\psi(\beta_1 + \cdots + \beta_{m-1}) = \varphi(\beta_1 + \cdots + \beta_{m-1}),$$

et on a $\psi(\beta_m) = \varphi(\beta_m)$, d'où $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$, ce qui démontre le corollaire.

Pour toute racine $\alpha = \sum_{\beta \in B(C)} n_\beta \beta$ de R, notons $Y(\alpha)$ l'ensemble des $\beta \in B(C)$ tels que $n_\beta \neq 0$. Observons d'autre part que B(C) s'identifie à l'ensemble des sommets du *graphe* du système de Coxeter formé par W(R) et les s_{α_i} (cf. chap. IV, § 1, n° 9 et chap. V, § 3, n° 2).

COROLLAIRE 3. — *a) Soit* $\alpha \in R$. *Alors* $Y(\alpha)$ *est une partie connexe de* B(C) (chap. IV, Annexe).

b) Soit Y *une partie connexe non vide de* B(C). *Alors* $\sum_{\beta \in Y} \beta$ *appartient à* R.

Pour prouver *a*), on peut supposer α positive. Raisonnons par récurrence sur Card $(Y(\alpha))$, l'assertion étant triviale si Card $(Y(\alpha)) = 1$. D'après la prop. 19, il existe $\beta \in B(C)$ tel que $\alpha - \beta \in R$. Soit p le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $\gamma = \alpha - p\beta \in R$. Comme $\gamma - \beta \notin R$ et $\gamma + p\beta \in R$, on a $(\gamma|\beta) \neq 0$ (prop. 9); β est donc liée à au moins un élément de $Y(\gamma)$. Mais $Y(\alpha) = Y(\gamma) \cup \{\beta\}$, et $Y(\gamma)$ est connexe d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $Y(\alpha)$ est connexe, ce qui prouve *a*).

Soit maintenant Y une partie connexe non vide de B(C) et montrons par récurrence sur Card (Y) que $\sum_{\beta \in Y} \beta$ est une racine. Le cas où Card $(Y) \leqslant 1$ est trivial. Supposons que Card $(Y) \geqslant 2$. Comme X est une forêt (chap. V, § 4, n° 8, prop. 8), Y est un *arbre* et possède un sommet terminal β (chap. IV, Annexe). L'ensemble $Y - \{\beta\}$ est connexe, et un de ses éléments est lié à β. Vu l'hypothèse de récurrence, on a $\alpha = \sum_{\gamma \in Y - \{\beta\}} \gamma \in R$, et comme $(\alpha|\beta) < 0$, on a bien $\alpha + \beta \in R$ (th. 1). C.Q.F.D.

7. Ensembles clos de racines

DÉFINITION 4. — *Soit* P *un sous-ensemble de* R.

(i) *On dit que* P *est clos si les conditions* $\alpha \in P$, $\beta \in P$, $\alpha + \beta \in R$ *impliquent* $\alpha + \beta \in P$.

(ii) *On dit que* P *est parabolique si* P *est clos et si* $P \cup (-P) = R$.

(iii) *On dit que* P *est symétrique si* $P = -P$.

Lemme 3. — *Soient* C *une chambre de* R *et* P *un sous-ensemble clos de* R *contenant* $R_+(C)$ (notation du n° 6). *Soient* $\Sigma = B(C) \cap (-P)$, *et* Q *l'ensemble des racines combinaisons linéaires à coefficients entiers* $\leqslant 0$ *des éléments de* Σ. *Alors* $P = R_+(C) \cup Q$.

Il s'agit de montrer que $P \cap (-R_+(C)) = Q$. Soit $-\alpha \in Q$. Alors α est somme de n éléments de Σ. Montrons que $-\alpha \in P$, par récurrence sur n. C'est évident si $n = 1$. Si $n > 1$, on peut écrire, d'après la prop. 19 du n° 6, $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\gamma \in \Sigma$ et β somme de $n - 1$ éléments de Σ. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $-\beta \in P$; comme $-\gamma \in P$ et que P est clos, on a $-\alpha \in P$. Donc $Q \subset P \cap (-R_+(C))$. Réciproquement, soit $-\alpha \in P \cap (-R_+(C))$. Alors α est somme de p éléments de B(C). Montrons que $-\alpha \in Q$, par récurrence sur p. C'est évident si $p = 1$. Si $p > 1$, on peut écrire, d'après la prop. 19, $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\gamma \in B(C)$ et β racine somme de $p - 1$ éléments de $B(C)$. Comme $-\gamma = \beta + (-\alpha)$ et que P est clos, on a $-\gamma \in P$, donc $\gamma \in \Sigma$. D'autre part, $-\beta = \gamma + (-\alpha)$ donc $-\beta \in P$ parce que P est clos. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $-\beta \in Q$, donc $-\alpha = -\beta - \gamma \in Q$. Donc $P \cap (-R_+(C)) \subset Q$.

Proposition 20. — *Soit* P *un sous-ensemble de* R. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) P *est parabolique ;*

(ii) P *est clos et il existe une chambre* C *de* R *telle que* $P \supset R_+(C)$;

(iii) *il existe une chambre* C *de* R *et une partie* Σ *de* $B(C)$ *telle que* P *soit la réunion de* $R_+(C)$ *et de l'ensemble* Q *des racines combinaisons linéaires à coefficients entiers* $\leqslant 0$ *des éléments de* Σ.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : ceci résulte du lemme 3.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : adoptons les hypothèses et les notations de (iii). Il est clair que $P \cup (-P) = R$. Soient $\alpha, \beta \in P$ tels que $\alpha + \beta \in R$, et montrons que $\alpha + \beta \in P$. C'est évident si la racine $\alpha + \beta$ est positive. Supposons $\alpha + \beta$ négative. On a donc $\alpha + \beta = \sum_{\gamma \in B(C)} n_\gamma \gamma$, avec $n_\gamma \leqslant 0$. Mais le coefficient de tout élément γ de $B(C) - \Sigma$ dans α ou β est $\geqslant 0$; on a donc $n_\gamma = 0$ si $\gamma \in B(C) - \Sigma$, d'où $\alpha + \beta \in Q \subset P$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : supposons P parabolique. Soit C une chambre telle que Card $(P \cap R_+(C))$ soit le plus grand possible. Soit $\alpha \in B(C)$ et supposons que $\alpha \notin P$, donc que $-\alpha \in P$. Pour tout $\beta \in P \cap R_+(C)$, β est non proportionnel à α (car l'hypothèse $\beta = 2\alpha$ entraînerait $\alpha = 2\alpha + (-\alpha) \in P$ puisque P est clos). Donc $s_\alpha(\beta) \in R_+(C)$ (n° 6, cor. 1 de la prop. 17). Si on pose $C' = s_\alpha(C)$, on a donc $\beta = s_\alpha(s_\alpha(\beta)) \in s_\alpha(R_+(C)) = R_+(C')$. Ainsi, $P \cap R_+(C) \subset P \cap R_+(C')$. Par ailleurs, $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in s_\alpha(R_+(C)) = R_+(C')$, donc $-\alpha \in P \cap R_+(C')$, donc Card $(P \cap R_+(C'))$ > Card $(P \cap R_+(C))$. Ceci est absurde, donc $\alpha \in P$. Donc $B(C) \subset P$, et par suite $R_+(C) \subset P$ d'après la prop. 19 et le fait que P est clos.

Corollaire 1. — *Soit* P *un sous-ensemble de* R. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une chambre* C *telle que* $P = R_+(C)$;

(ii) P *est clos, et* $\{P, -P\}$ *est une partition de* R.

La chambre C *telle que* $P = R_+(C)$ *est alors unique.*

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : ceci résulte du th. 3 (n° 6).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : ceci résulte de l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) de la prop. 20.

Si $P = R_+(C)$, $C^\vee$ est l'ensemble des $x^* \in V^*$ tels que $\langle x^*, x \rangle > 0$ pour tout $x \in P$, d'où l'unicité de C.

Corollaire 2. — *Supposons* V *muni d'une structure d'espace vectoriel ordonné telle que, pour cette structure, toute racine de* R *soit positive ou négative. Soit* P *l'ensemble* *des racines positives pour cette structure. Alors il existe une chambre* C *de* R *et une seule telle que* $P = R_+(C)$.

En effet, P vérifie la condition (ii) du cor. 1.

Ce corollaire s'applique en particulier lorsque l'ordre considéré est total, la condition sur R étant alors automatiquement remplie. Rappelons qu'on obtient par exemple un tel ordre en choisissant une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans V et en prenant sur V l'ordre *lexicographique*, où $x = \sum_i \xi_i e_i$ est $\geqslant 0$ si tous les ξ_i sont 0, ou si $\xi_i > 0$ pour le plus petit indice i tel que $\xi_i \neq 0$.

Corollaire 3. — *Pour qu'une partie* B *de* R *soit une base de* R, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies* :

(i) *les éléments de* B *sont linéairement indépendants* ;

(ii) *toute racine de* R *est combinaison linéaire d'éléments de* B *à coefficients tous positifs ou tous négatifs*;

(iii) *toute racine de* B *est indivisible.*

On sait déjà que les conditions sont nécessaires (nº 5, th. 2, et nº 6, th. 3). Supposons les conditions (i), (ii), (iii) vérifiées. Soit P l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients $\geqslant 0$ des éléments de B. Puisque P vérifie la condition (ii) du cor. 1, il existe une chambre C telle que $P = R_+(C)$; soit $B' = B(C)$, et soient X et X' les cônes convexes engendrés par B et B'. On a

$$B \subset P \subset X \qquad \text{et} \qquad B' \subset P \subset X',$$

ce qui montre que X et X' sont tous deux engendrés par P, donc coïncident. Mais les demi-droites engendrées par les éléments de B (resp. de B') sont les génératrices extrémales de X (resp. de X'); comme une telle demi-droite ne contient qu'une seule racine indivisible, on a donc $B = B'$.

Corollaire 4. — *Soient* B *une base de* R, B' *une partie de* B, V' *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* B', *et* $R' = R \cap V'$. *Alors* B' *est une base du système de racines* R'.

Ceci résulte aussitôt du cor. 3, et du cor. de la prop. 4.

On dit que R' est le système de racines *engendré* par B'.

Corollaire 5. — *Soient* B *une base de* R, $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *des parties de* B *deux à deux orthogonales, et* $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$. *Alors toute racine* α *qui est combinaison linéaire d'éléments de* A *est déjà combinaison linéaire des éléments d'un des* A_i. *En particulier, si* R *est irréductible, il n'existe pas de partition de* B(C) *en deux ensembles orthogonaux.*

Soient $E_1, \ldots, E_r$, E les sous-espaces vectoriels de V engendrés respectivements par $A_1, \ldots, A_r$, A. Grâce au cor. 4, on peut supposer que $E = V$. Alors, d'après le th. 2 (vii) du nº 5, les E_i sont stables par W(R), donc R est réunion des $R \cap E_i$ (nº 2, prop. 5).

COROLLAIRE 6. — *Adoptons les hypothèses et les notations de la prop.* 20. *Soit* V_1 *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* Σ. *Alors* $P \cap (-P) = Q \cup (-Q) = V_1 \cap R$ *est un système de racines dans* V_1 *de base* Σ.

On a $P \cap (-P) = (R_+(C) \cup Q) \cap ((-R_+(C)) \cup (-Q)) = Q \cup (-Q)$. Le th. 3 prouve que $Q \cup (-Q) = V_1 \cap R$. Enfin, Σ est base du système de racines $V_1 \cap R$ d'après le cor. 4.

PROPOSITION 21. — *Soient* C (resp. C′) *une chambre de* R, Σ (resp. Σ') *une partie de* B(C) (resp. B(C′)), Q (resp. Q′) *l'ensemble des racines combinaisons linéaires à coefficients entiers négatifs des éléments de* Σ (resp. Σ'), *et* $P = Q \cup R_+(C)$ (resp. $P' = Q' \cup R_+(C')$). *S'il existe un élément du groupe de Weyl transformant* P *en* P′, *il existe un élément du groupe de Weyl transformant* C *en* C′ *et* Σ *en* Σ'.

On se ramène aussitôt au cas où $P = P'$. Soit V_1 le sous-espace vectoriel de V engendré par $P \cap (-P)$. Alors Σ et Σ' sont deux bases du système de racines $R_1 = P \cap (-P)$ dans V_1 (cor. 6 de la prop. 20). Il existe donc $g_1 \in W(R_1)$ tel que $g_1(\Sigma) = \Sigma'$. Il est clair que g_1 est induit par un élément g de W(R) qui est un produit de symétries s_σ, avec $\sigma \in \Sigma$. Soit $\gamma = \sum_{\beta \in B(C)} c_\beta \beta$ un élément de $P - R_1$. On a $c_\beta > 0$ pour au moins un $\beta \in B(C) - \Sigma$. D'autre part, si $\sigma \in \Sigma$, on a $s_\sigma(\gamma) - \gamma \in V_1$, donc $s_\sigma(\gamma)$ admet au moins une coordonnée > 0 par rapport à B(C) (n° 1, formule (5)), d'où $s_\sigma(\gamma) \in R_+(C)$ et finalement $s_\sigma(\gamma) \in P - R_1$. Il en résulte que $P - R_1$ est stable par les s_σ, $\sigma \in \Sigma$, donc par g, et l'on a $g(P) = P$. On est ainsi ramené à prouver la proposition lorsque $P = P'$ et $\Sigma = \Sigma'$. Dans ce cas, on a $Q = Q'$, donc $R_+(C) = P - Q = P - Q' = R_+(C')$, donc $C = C'$ (cor. 1 de la prop. 20).

COROLLAIRE. — *Soient* P, P′ *deux sous-ensembles paraboliques de* R *transformés l'un de l'autre par un élément du groupe de Weyl. S'il existe une chambre* C *de* R *telle que* $R_+(C) \subset P$ *et* $R_+(C) \subset P'$, *on a* $P = P'$.

Ceci résulte du lemme 3 et de la prop. 21 puisque le seul élément de W(R) transformant C en C est 1, cf. n° 5, th. 2.

PROPOSITION 22. — *Soit* P *un sous-ensemble clos de* R *tel que* $P \cap (-P) = \varnothing$. *Il existe alors une chambre* C *de* R *telle que* $P \subset R_+(C)$.

1) Compte tenu du cor. du th. 1, n° 3, les hypothèses $\alpha \in P$, $\beta \in P$, $(\alpha|\beta) < 0$ impliquent $\alpha + \beta \in P$.

2) Montrons qu'aucune somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q$ ($q \geqslant 1$) d'éléments de P n'est nulle. On procède par récurrence sur q. L'assertion étant évidente pour $q = 1$, supposons $q \geqslant 2$. Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q = 0$, alors

$$-\alpha_1 = \alpha_2 + \cdots + \alpha_q,$$

donc $(-\alpha_1|\alpha_2 + \cdots + \alpha_q) > 0$, d'où l'existence d'un $j \in [2, q]$ tel que $(\alpha_1|\alpha_j) < 0$. D'après la partie 1) de la démonstration, on a $\alpha_1 + \alpha_j \in P$, et la relation $(\alpha_1 + \alpha_j) + \sum_{i \neq 1, j} \alpha_i = 0$ contredit l'hypothèse de récurrence.

3) Montrons qu'il existe un élément γ non nul dans V tel que $(\gamma|\alpha) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in P$. Dans le cas contraire, le résultat de 1) prouverait qu'on peut trouver une suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ d'éléments de P tels que

$$\beta_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_i \in P$$

pour tout i; il existerait deux entiers distincts i, j tels que $\beta_i = \beta_j$, ce qui contredirait le résultat de 2).

4) Pour démontrer la proposition, il suffit (cor. 2 de la prop. 20) de montrer qu'il existe une base $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant l}$ de V telle que, pour la relation d'ordre lexicographique définie par cette base, tout élément de P soit > 0. Procédons par récurrence sur $l = \dim V$, en supposant la proposition établie pour les dimensions $< l$. Soit $\gamma \in V$ tel que $\gamma \neq 0$ et $(\gamma|\alpha) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in P$ (cf. 3)). Soient L l'hyperplan orthogonal à γ, et V' le sous-espace de L engendré par $R \cap L$. Alors $R \cap L$ est un système de racines dans V' et $P \cap L$ est clos dans $R \cap L$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(\beta_1, \ldots, \beta_{l'})$ de V' telle que les éléments de $P \cap L$ soient > 0 pour l'ordre lexicographique défini par cette base. Alors toute base de V dont les $l' + 1$ premiers éléments sont $\gamma, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{l'}$ et dont les éléments suivants sont dans L possède la propriété requise.

Proposition 23. — *Soient* P *un sous-ensemble de* R *et* V_1 (resp. Γ) *le sous-espace vectoriel* (resp. *le sous-groupe*) *de* V *engendré par* P. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) P *est clos et symétrique*;

(ii) P *est clos, et* P *est un système de racines dans* V_1;

(iii) $\Gamma \cap R = P$.

Supposons qu'il en soit ainsi. Pour tout $\alpha \in P$, *soit* $\alpha_1^\vee$ *la restriction de* $\alpha^\vee$ *à* V_1. *Alors l'application* $\alpha \longmapsto \alpha_1^\vee$ *est la bijection canonique du système de racines* P *sur* $P^\vee$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : évident.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : supposons P clos et symétrique. D'abord P vérifie (SR_I) dans V_1. Soient $\alpha, \beta \in P$, et montrons que $s_\alpha(\beta) \in P$. C'est évident si α et β sont proportionnels. Sinon, on a $s_\alpha(\beta) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$ et $\beta - p\alpha \in R$ pour tout entier rationnel p compris entre 0 et $n(\beta, \alpha)$ (prop. 9, nº 3), donc

$$\beta - n(\beta, \alpha)\alpha \in P$$

puisque P est clos et symétrique. Ainsi, $s_{\alpha, \alpha_1^\vee}(P) = P$, et P vérifie (SR_{II}). Il est clair que P vérifie (SR_{III}). Donc P vérifie (ii), et on a en même temps prouvé la dernière assertion de la proposition.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : supposons vérifiée la condition (ii), et prouvons que $\Gamma \cap R = P$. Il est clair que $P \subset \Gamma \cap R$. Soit $\beta \in \Gamma \cap R$. Puisque $\beta \in \Gamma$ et que $P = -P$, on a $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in P$. Nous allons prouver que $\beta \in P$.

C'est évident si $k = 1$. Raisonnons par récurrence sur k. On a

$$0 < (\beta|\beta) = \sum_{i=1}^{k} (\beta|\alpha_i),$$

donc $(\beta|\alpha_i) > 0$ pour un indice i. Si $\beta = \alpha_i$, on a $\beta \in \mathrm{P}$. Sinon, on a $\beta - \alpha_i \in \mathrm{R}$ (cor. du th. 1, n° 3), donc $\beta - \alpha_i \in \mathrm{P}$ d'après l'hypothèse de récurrence, donc $\beta \in \mathrm{P}$ puisque P est clos.

Les conditions de la prop. 23 peuvent être réalisées avec $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}$ et pourtant $\mathrm{P} \neq \mathrm{R}$. Par exemple, il peut arriver que R soit un système de type G_2 et P un système de type A_2; cf. planche X.

Proposition 24. — *Soit* R′ *l'intersection de* R *avec un sous-espace vectoriel de* V, *de sorte que* R′ *est un système de racines dans le sous-espace vectoriel* V′ *qu'il engendre* (cf. cor. de la prop. 4, n° 1). *Soit* B′ *une base de* R′.

(i) *Il existe une base de* R *contenant* B′.

(ii) R′ *est l'ensemble des éléments de* R *qui sont combinaisons linéaires des éléments de* B′.

L'assertion (ii) est évidente. Prouvons (i). Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l)$ une base de V telle que $\mathrm{B}' = (\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_l)$. L'ordre lexicographique sur V correspondant à cette base définit une chambre C de R. Il est clair que tout élément de B′ est minimal dans $\mathrm{R}_+(\mathrm{C})$. Donc $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}(\mathrm{C})$.

8. Plus grande racine

Proposition 25. — *Supposons* R *irréductible. Soit* C *une chambre de* R, *et soit* $\mathrm{B}(\mathrm{C}) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *la base correspondante.*

(i) *Il existe une racine* $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$ *telle que, pour toute racine* $\sum_{i=1}^{l} p_i\alpha_i$, *on ait* $n_1 \geqslant p_1, n_2 \geqslant p_2, \ldots, n_l \geqslant p_l$. *En d'autres termes,* R *possède un plus grand élément* $\tilde{\alpha}$ *pour la relation d'ordre définie par* C.

(ii) *On a* $\tilde{\alpha} \in \overline{\mathrm{C}}$.

(iii) *On a* $(\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}) \geqslant (\alpha'|\alpha')$ *pour toute racine* α'.

(iv) *Pour toute racine positive* α' *non proportionnelle à* $\tilde{\alpha}$, *on a* $n(\alpha', \tilde{\alpha}) = 0$ *ou* 1.

1) Soient $\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^{l} p_i\alpha_i$ deux racines maximales pour l'ordre défini par C. On va prouver que $\alpha = \beta$, ce qui établira (i).

2) Si on avait $(\alpha|\alpha_i) < 0$ pour un indice i, on en déduirait que $\alpha + \alpha_i \in \mathrm{R}$ ou $\alpha = -\alpha_i$ (cor. du th. 1, n° 3), et ces deux éventualités sont absurdes d'après la maximalité de α. Donc $(\alpha|\alpha_i) \geqslant 0$ pour tout i.

3) Si $\alpha < 0$, on a $\alpha < -\alpha$, ce qui est absurde. Donc $n_i \geqslant 0$ pour tout i. Soit J l'ensemble des i tels que $n_i > 0$, et J′ le complémentaire de J dans $\{1, 2, \ldots, l\}$. On a $\mathrm{J} \neq \varnothing$. Si J′ était non vide, il existerait un $i \in \mathrm{J}$ et un

$i' \in J'$ tels que $(\alpha_i|\alpha_{i'}) < 0$ (cor. 5 de la prop. 20, nº 7); on aurait

$$(\alpha|\alpha_{i'}) = \sum_{i \in J} n_i(\alpha_i|\alpha_{i'}) < 0$$

puisque $(\alpha_j|\alpha_k) \leqslant 0$ quels que soient j et k distincts, et ceci contredirait 2). Donc $J' = \varnothing$ et $n_i > 0$ pour tout i.

4) On a $(\beta|\alpha_i) \geqslant 0$ pour tout i d'après 2). On ne peut avoir $(\beta|\alpha_i) = 0$ pour tout i puisque $\beta \neq 0$. On conclut alors de 3) que

$$(\beta|\alpha) = \sum_i n_i(\beta|\alpha_i) > 0.$$

Si $\gamma = \alpha - \beta \in R$, on a $\alpha > \beta$ ou $\beta > \alpha$ (th. 3, nº 6), ce qui contredit la maximalité de α et β. Donc $\alpha = \beta$ (cor. du th. 1, nº 3).

5) D'après 2), on a $\tilde{\alpha} \in \overline{C}$. Soit $\alpha' \in R$, et prouvons que $(\alpha'|\alpha') \leqslant (\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha})$. Puisque $\overline{C}$ est un domaine fondamental pour $W(R)$, on peut supposer que $\alpha' \in \overline{C}$. On a $\tilde{\alpha} - \alpha' \geqslant 0$, donc $(\tilde{\alpha} - \alpha'|x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \overline{C}$. En particulier $(\tilde{\alpha} - \alpha'|\tilde{\alpha}) \geqslant 0$ et $(\tilde{\alpha} - \alpha'|\alpha') \geqslant 0$, d'où $(\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}) \geqslant (\alpha'|\tilde{\alpha}) \geqslant (\alpha'|\alpha')$. Donc $n(\alpha', \tilde{\alpha})$ vaut 0 ou 1 ou -1 (prop. 8, nº 3) si α' est non proportionnel à $\tilde{\alpha}$. Si $\alpha' \geqslant 0$, on a $(\tilde{\alpha}|\alpha') \geqslant 0$ d'après 2), donc $n(\alpha', \tilde{\alpha}) \geqslant 0$, donc $n(\alpha', \tilde{\alpha})$ vaut 0 ou 1.

C.Q.F.D.

Remarque. — On dit que la racine

$$\tilde{\alpha} = \sum_i n_i \alpha_i$$

de (i) est *la plus grande racine* de R (vis-à-vis de C). On notera que, d'après (i), on a $n_i \geqslant 1$ pour tout i.

9. Poids, poids radiciels

Soit $l = \dim V$. On note $Q(R)$ le sous-groupe de V engendré par R; les éléments de $Q(R)$ s'appellent les *poids radiciels* de R. D'après le th. 3 du nº 6, $Q(R)$ est un sous-groupe discret de rang l de V, et toute base de R est une base de $Q(R)$.

De même, le groupe $Q(R^\vee)$ est un sous-groupe discret de rang l de V^*.

PROPOSITION 26. — *L'ensemble des $x \in V$ tels que $\langle x, y^* \rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $y^* \in Q(R^\vee)$ (ou, ce qui revient au même, pour tout $y^* \in R^\vee$) est un sous-groupe discret G de V contenant $Q(R)$. Si B′ est une base de $R^\vee$, la base duale de B′ dans V est une base de G.*

Soit $x \in V$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $\langle x, y^* \rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $y^* \in Q(R^\vee)$;
(ii) $\langle x, y^* \rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $y^* \in B'$;
(iii) les coordonnées de x par rapport à la base duale de B′ sont dans $\mathbf{Z}$.

On en conclut que la base duale de B′ est une base de G. D'autre part, (SR_{III}) prouve que $R \subset G$, d'où $Q(R) \subset G$.
Le groupe G de la prop. 26 se note P(R), et ses éléments s'appellent les *poids* de R. On peut considérer aussi le groupe $P(R^\vee)$ des poids de $R^\vee$.

D'après *Alg.*, chap. VII, 2e éd., § 4, n° 8, les groupes

$$P(R)/Q(R), \qquad P(R^\vee)/Q(R^\vee)$$

sont des groupes finis en dualité sur $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, donc isomorphes. L'ordre commun de ces deux groupes s'appelle l'*indice de connexion* de R (ou de $R^\vee$).

Si R est somme directe de systèmes de racines R_i, le groupe Q(R) (resp. P(R)) s'identifie canoniquement à la somme directe des $Q(R_i)$ (resp. $P(R_i)$).

PROPOSITION 27. — *Soient* R_1 *une partie de* R, Q_1 *le sous-groupe de* Q(R) *engendré par* R_1, *et* W_1 *le sous-groupe de* W(R) *engendré par les* s_α ($\alpha \in R_1$). *Si* $p \in P(R)$ *et* $w \in W_1$, *on a* $p - w(p) \in Q_1$.

Si $w = s_\alpha$ avec $\alpha \in R_1$, on a

$$p - w(p) = \langle p, \alpha^\vee \rangle \alpha \in \mathbf{Z}\alpha \subset Q_1.$$

Si $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_r}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R_1$, on a donc encore $p - w(p) \in Q_1$ comme on le voit par récurrence sur r.
Le groupe A(R) laisse invariants P(R) et Q(R), donc opère dans le groupe quotient P(R)/Q(R). D'après la prop. 27, le groupe W(R) opère trivialement dans P(R)/Q(R). Par passage au quotient, on voit que *le groupe quotient* A(R)/W(R) (cf. prop. 16, n° 5) *opère canoniquement dans* P(R)/Q(R).

10. Poids fondamentaux, poids dominants

Supposons R *réduit*. Soit C une chambre de R, et soit B la base de R correspondante. Comme R est réduit, $B^\vee = \{\alpha^\vee\}_{\alpha \in B}$ est une base de $R^\vee$. La *base duale* $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in B}$ de $B^\vee$ est donc une base du groupe des poids; ses éléments s'appellent les *poids fondamentaux* (relativement à B, ou à C); lorsque les éléments de B sont numérotés $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, on note $(\varpi_1, \dots, \varpi_l)$ les poids fondamentaux correspondants.

Soit $x \in V$. Pour que $x \in C$, il faut et il suffit que $\langle x, \alpha^\vee \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in B$. Il s'ensuit que C est l'ensemble des combinaisons linéaires des ϖ_α à coefficients > 0, et $\overline{C}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des ϖ_α à coefficients $\geqslant 0$.

Les éléments $n(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ de la matrice de Cartan sont, pour α fixé, les coordonnées de α par rapport à la base $(\varpi_\beta)_{\beta \in B}$:

$$\alpha = \sum_{\beta \in B} n(\alpha, \beta) \varpi_\beta. \tag{14}$$

La matrice de Cartan est donc la transposée de la matrice de l'injection canonique

$$Q(R) \to P(R)$$

par rapport aux bases B et $(\varpi_\alpha)_{\alpha\in B}$ des **Z**-modules $Q(R)$ et $P(R)$.

Un poids ϖ est dit *dominant* s'il appartient à $\overline{C}$, autrement dit si ses coordonnées par rapport à $(\varpi_\alpha)_{\alpha\in B}$ sont des entiers $\geqslant 0$, ou encore si $g(\varpi) \leqslant \varpi$ pour tout $g \in W(R)$ (nº 6, prop. 18). Puisque $\overline{C}$ est un domaine fondamental pour W(R) (th. 2), il existe, pour tout poids ϖ, un poids dominant ϖ' et un seul tel que ϖ' soit transformé de ϖ par W(R).

On a

$$\langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle = (\varpi_\alpha | \frac{2\beta}{(\beta|\beta)}) = \delta_{\alpha\beta}$$

pour $\alpha, \beta \in B$ ($\delta_{\alpha\beta}$ désignant le symbole de Kronecker), d'où

$$(15) \qquad s_\beta(\varpi_\alpha) = \varpi_\alpha - \delta_{\alpha\beta}\beta \qquad \text{et} \qquad (\varpi_\alpha|\beta) = \frac{1}{2}(\beta|\beta)\delta_{\alpha\beta}.$$

Autrement dit, ϖ_α *est orthogonal à* β *pour* $\beta \neq \alpha$, *et sa projection orthogonale sur* $\mathbf{R}\alpha$ *est* $\frac{1}{2}\alpha$. Puisque $\varpi_\alpha \in \overline{C}$, on a $(\varpi_\alpha|\varpi_\beta) \geqslant 0$ pour $\alpha, \beta \in B$, i.e. l'angle $\widehat{(\varpi_\alpha, \varpi_\beta)}$ est aigu ou droit. Les poids dominants sont les $\varpi \in V$ tels que $2(\varpi|\alpha)/(\alpha|\alpha)$ soit un entier $\geqslant 0$ pour tout $\alpha \in B$.

PROPOSITION 28. — *Soient* B *une base de* R, B′ *une partie de* B, V′ *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* B′, $R' = R \cap V'$ (*qui est un système de racines dans* V′), $R'^\vee$ *le système de racines inverse* (*qui s'identifie à l'image canonique de* R′ *dans* $R^\vee$), V_1 *l'orthogonal de* $R'^\vee$ *dans* V, *et* p *le projecteur de* V *sur* V′ *parallèlement à* V_1. *Alors*, $Q(R') = Q(R) \cap V'$, $P(R') = p(P(R))$. *L'ensemble des poids dominants de* R′ *est l'image par* p *de l'ensemble des poids dominants de* R.

En effet, $Q(R)$ est le sous-groupe de V de base B, $Q(R')$ est le sous-groupe de V de base B′ (nº 7, cor. 4 de la prop. 20) d'où aussitôt $Q(R') = Q(R) \cap V'$. Si $\varpi \in P(R)$ et $\alpha \in R'$, on a $\langle p(\varpi), \alpha^\vee \rangle = \langle \varpi, \alpha^\vee \rangle \in \mathbf{Z}$, donc $p(\varpi) \in P(R')$, donc $p(P(R)) \subset P(R')$. Si $\varpi' \in P(R')$, ϖ' se prolonge en une forme linéaire ϖ sur V^* nulle sur $(B - B')^\vee$; on a $\langle \varpi, \alpha^\vee \rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $\alpha \in B$, donc $\varpi \in P(R)$, et $\varpi' = p(\varpi)$; donc $P(R') \subset p(P(R))$. Ainsi $P(R') = p(P(R))$, et l'assertion relative aux poids dominants se démontre de la même façon.

PROPOSITION 29. — *Soit* ρ *la demi-somme des racines* > 0.

(i) *On a* $\rho = \sum_{\alpha\in B} \varpi_\alpha$; *c'est un élément de* C.

(ii) $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ *pour tout* $\alpha \in B$.

(iii) *On a* $(2\rho|\alpha) = (\alpha|\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in B$.

Comme R est réduit, on a $s_\alpha(R_+(C) - \{\alpha\}) = R_+(C) - \{\alpha\}$ et $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ pour $\alpha \in B$ (n° 6, cor. 1 de la prop. 17), d'où $s_\alpha(2\rho) = 2\rho - 2\alpha$. Comme $s_\alpha(\rho) = \rho - \langle \rho, \alpha^\vee \rangle \alpha$, on voit que

$$\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1 = \langle \sum_{\beta \in B} \varpi_\beta, \alpha^\vee \rangle.$$

D'où $\rho = \sum_\beta \varpi_\beta$, et par suite $\rho \in C$. Enfin (iii) équivaut à $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$.

COROLLAIRE. — *Soit σ la demi-somme des éléments >0 de $R^\vee$ (pour $B^\vee$). Pour tout $\alpha \in V$, la somme des coordonnées de α par rapport à la base B est $\langle \alpha, \sigma \rangle$. Si $\alpha \in R$, cette somme est aussi égale à* $\frac{1}{2} \sum_{\beta \in R_+(C)} n(\alpha, \beta)$.

Échangeant les rôles de R et $R^\vee$ dans ce qui précède, on a $\langle \alpha, \sigma \rangle = 1$ pour tout $\alpha \in B$, d'où le corollaire.

11. Transformation de Coxeter

Soit C une chambre de R, soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ la base de R correspondante, et soit $c = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_l}$. L'élément c de W s'appelle la *transformation de Coxeter* de W définie par C et la bijection $i \longmapsto \alpha_i$ (chap. V, § 6, n° 1). Son ordre h est appelé le *nombre de Coxeter* de W (ou de R).

PROPOSITION 30. — *Supposons R irréductible. Soit m un entier compris entre 1 et $h-1$, et étranger à h. Alors* $\exp(\frac{2i\pi m}{h})$ *est une valeur propre de c de multiplicité* 1.

(En particulier, m est un *exposant* de W, cf. chap. V, § 6, n° 2).

Démontrons d'abord un lemme :

Lemme 3. — *Pour tout $w \in W$, le polynôme caractéristique de w est à coefficients entiers.*

On sait (n° 6, th. 3) que le sous-groupe Q(R) de V engendré par R a pour base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Comme w laisse stable Q(R), sa matrice par rapport à $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ est à coefficients entiers; il en est donc de même de son polynôme caractéristique.

Soit P le polynôme caractéristique de c. Le lemme ci-dessus montre que les coefficients de P sont entiers. D'après le chap. V, § 6, n° 2, cor. 2 de la prop. 3, la racine primitive h-ème de l'unité $z = \exp(\frac{2i\pi}{h})$ est une racine simple de P. Tout *conjugué* de z sur **Q** est donc aussi racine simple de P. Mais on sait (*) que toutes les racines primitives h-èmes de l'unité sont conjuguées sur **Q**. Elles sont donc toutes racines simples de P, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 31. — *Supposons R irréductible et réduit, et soit $\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$ la plus grande racine de R (cf. n° 8). On a alors $n_1 + \cdots + n_l = h - 1$.*

(*) Ce résultat figurera dans un chapitre d'*Alg. comm.* en préparation. En attendant, le lecteur pourra se reporter à D. HILBERT, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, § 97 (*Gesamm. Abh.*, I, p. 63-363).

Soit R_+ l'ensemble des racines positives relativement à C. On a (nº 10, cor. de la prop. 29) :

$$n_1 + \cdots + n_l = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} n(\beta, \alpha)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+,\, \alpha \neq \beta} n(\beta, \alpha) = 1 + \sum_{\alpha \in R_+,\, \alpha \neq \beta} \frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}.$$

D'après le nº 8, prop. 25 (iv), on a, pour $\alpha \in R_+$ et $\alpha \neq \beta$, $n(\alpha, \beta) = 0$ ou 1, donc $n(\alpha, \beta)^2 = n(\alpha, \beta)$, c'est-à-dire $\frac{4(\alpha|\beta)^2}{(\beta|\beta)^2} = \frac{2(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}$. D'où :

$$n_1 + \cdots + n_l + 1 = 2 + 2 \sum_{\alpha \in R_+,\, \alpha \neq \beta} \frac{(\alpha|\beta)^2}{(\beta|\beta)(\alpha|\alpha)}$$
$$= 2 \sum_{\alpha \in R^+} \frac{(\alpha|\beta)^2}{(\beta|\beta)(\alpha|\alpha)} = (\beta|\beta)^{-1} \sum_{\alpha \in R} \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\Big|\beta\right)^2.$$

D'après le chap. V, § 6, nº 2, cor. du th. 1, on a :

$$\sum_{\alpha \in R} \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\Big|\beta\right)^2 = h(\beta|\beta)$$

d'où $n_1 + \cdots + n_l + 1 = h$.

Proposition 32. — *Supposons que* R *soit irréductible, et que toutes les racines aient même longueur. Soit $\alpha \in R$. Le nombre d'éléments de* R *non orthogonaux à α est $4h - 6$.*

Soit R' l'ensemble des racines non proportionnelles et non orthogonales à α. D'après le chap. V, § 6, nº 2, cor. du th. 1, on a

$$(\alpha|\alpha)^2 + (\alpha|-\alpha)^2 + \sum_{\beta \in R'} (\alpha|\beta)^2 = h(\alpha|\alpha)^2,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\beta \in R'} (\alpha|\beta)^2 = (h - 2)(\alpha|\alpha)^2.$$

Si $\beta \in R'$, on a $(\alpha|\beta) = \pm \frac{1}{2} (\alpha|\alpha)$ d'après la liste du nº 3. Donc

$$\frac{1}{4} \operatorname{Card} R' = h - 2, \qquad \operatorname{Card} R' = 4h - 8,$$

et le nombre de racines non orthogonales à α est $\operatorname{Card} R' + 2 = 4h - 6$.

Proposition 33. — *Supposons* R *irréductible et réduit. Posons $s_{\alpha_i} = s_i$, et soit Γ le sous-groupe de* W *engendré par $c = s_1 \ldots s_l$.*

(i) *Soit $\theta_i = s_l s_{l-1} \ldots s_{i+1}(\alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, l)$. On a $\theta_i > 0$, $c(\theta_i) < 0$.*

(ii) *Si α est une racine > 0 telle que $c(\alpha) < 0$, α est égale à l'une des θ_i.*

(iii) *La famille $(\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ est une base de $\mathbf{Q}(R)$.*

(iv) *Soit Ω_i l'orbite de θ_i pour Γ. Les ensembles Ω_i sont deux à deux disjoints, constituent toutes les orbites de Γ dans* R, *et ont chacun h éléments.*

Observons d'abord que $(s_1, \ldots, s_l)$ est une *décomposition réduite* de c (chap. IV, § 1, n° 1) par rapport à l'ensemble S des s_i. En effet, sinon, il existerait une partie $X = S - \{j\}$ à $l-1$ éléments de S telle que $c \in W_X$; on aurait alors $s_j \in W_X$, ce qui contredirait le cor. 2 de la prop. 7 du chap. IV, § 1, n° 8.

En appliquant à $c = s_1 \ldots s_l$ le cor. 2 de la prop. 17 du n° 6, on obtient les assertions (i) et (ii).

Soit Q_i le sous-groupe de $Q(R)$ engendré par les α_j, $j > i$. On vérifie immédiatement que Q_i est stable par les s_j, $j > i$, et que $s_j(\alpha_i) \equiv \alpha_i$ mod. Q_i pour $j > i$. On a donc :

$$\theta_i = s_l \ldots s_{i+1}(\alpha_i) \equiv \alpha_i \text{ mod. } Q_i.$$

En d'autres termes, il existe des entiers c_{ij} tels que :

$$\theta_i = \alpha_i + \sum_{j>i} c_{ij}\alpha_j.$$

D'où aussitôt (iii).

Enfin, soit α une racine. L'élément $\sum_{k=0}^{h-1} c^k(\alpha)$ est invariant par c, donc nul (chap. V, § 6, n° 2). Les $c^k(\alpha)$ ne peuvent donc pas être toutes de même signe, et il existe un k tel que $c^k(\alpha) > 0$ et $c^{k+1}(\alpha) < 0$. D'après (ii), $c^k(\alpha)$ est l'un des θ_i. Donc toute orbite de Γ dans R est l'une des Ω_i. Prolongeons alors $(x|y)$ en une forme hermitienne sur $V \otimes \mathbf{C}$. D'après la *Remarque* du chap. V, § 6, n° 2, il existe un élément $z \in V \otimes \mathbf{C}$ tel que $c(z) = \exp(\frac{2i\pi}{h})\, z$ et que $(\gamma|z) \neq 0$ pour tout $\gamma \in R$. Si $c^p(\alpha) = \alpha$, on a

$$(z|\alpha) = (z|c^p(\alpha)) = (c^{-p}(z)|\alpha) = \exp(\frac{-2i\pi p}{h})(z|\alpha),$$

d'où $\exp(\frac{-2i\pi p}{h}) = 1$, et $p \equiv 0$ mod. h. Cela prouve que l'orbite de α possède h éléments. D'après le th. 1 (ii) du chap. V, § 6, n° 2, le nombre total d'orbites de Γ dans R est donc $\frac{hl}{h} = l$. Il en résulte que les Ω_i sont deux à deux disjointes, ce qui achève de prouver (iv).

12. Forme bilinéaire canonique

On a vu (n° 1, prop. 3) que la forme bilinéaire symétrique

$$(x, y) \longmapsto B_R(x, y) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha^\vee, x\rangle \langle \alpha^\vee, y\rangle$$

sur V est non dégénérée et invariante par A(R). Échangeant les rôles de R et $R^\vee$, on voit que la forme bilinéaire symétrique $(x^*, y^*) \longmapsto B_{R^\vee}(x^*, y^*) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, x^*\rangle \langle \alpha, y^*\rangle$ sur V^* est non dégénérée et invariante par A(R).

La forme inverse de $B_{R^\vee}$ (resp. B_R) sur V (resp. V*) sera appelée la *forme bilinéaire canonique* sur V (resp. V*) et notée Φ_R (resp. $\Phi_{R^\vee}$). Elle est non dégénérée et invariante par A(R). Soit σ l'isomorphisme de V sur V* défini par $B_{R^\vee}$. On a, pour $x \in V$ et $y \in V$:

$$\Phi_R(x, y) = B_{R^\vee}(\sigma(x), \sigma(y)) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, \sigma(x) \rangle \langle \alpha, \sigma(y) \rangle.$$

Mais $\langle \alpha, \sigma(x) \rangle = B_{R^\vee}(\sigma(\alpha), \sigma(x)) = \Phi_R(\alpha, x)$. D'où

$$\Phi_R(x, y) = \sum_{\alpha \in R} \Phi_R(\alpha, x)\Phi_R(\alpha, y). \tag{16}$$

Compte tenu de la prop. 7 du nº 2, Φ_R est la seule forme bilinéaire symétrique invariante par W(R) et non nulle qui vérifie l'identité (16).

Pour $\beta \in R$, (16) donne

$$\Phi_R(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in R} \Phi_R(\alpha, \beta)^2 = \frac{1}{4} \Phi_R(\beta, \beta)^2 \sum_{\alpha \in R} n(\alpha, \beta)^2$$

d'où

$$4\Phi_R(\beta, \beta)^{-1} = \sum_{\alpha \in R} n(\alpha, \beta)^2. \tag{17}$$

Par ailleurs, d'après le lemme 2 du nº 1, on a, pour $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} B_R(x, y) &= \sum_{\alpha \in R} \Phi_R\Big(\frac{2\alpha}{\Phi_R(\alpha, \alpha)}, x\Big)\Phi_R\Big(\frac{2\alpha}{\Phi_R(\alpha, \alpha)}, y\Big) \\ &= 4 \sum_{\alpha \in R} \Phi_R(\alpha, x)\Phi_R(\alpha, y)\Phi_R(\alpha, \alpha)^{-2}. \end{aligned}$$

Si R est *irréductible*, il existe donc une constante $\gamma(R) > 0$ telle que

$$\sum_{\alpha \in R} \Phi_R(\alpha, x)\Phi_R(\alpha, y)\Phi_R(\alpha, \alpha)^{-2} = \gamma(R)\Phi_R(x, y). \tag{18}$$

Par définition de $\gamma(R)$, on a $B_R(x, y) = 4\gamma(R)\Phi_R(x, y)$, donc

$$\Phi_{R^\vee}(x^*, y^*) = (4\gamma(R))^{-1}B_{R^\vee}(x^*, y^*)$$

pour $x^*, y^* \in V^*$. Ceci prouve d'abord que $\gamma(R) = \gamma(R^\vee)$. D'autre part, pour $\beta \in R$,

$$\begin{aligned} \Phi_{R^\vee}(\beta^\vee, \beta^\vee) &= (4\gamma(R))^{-1} \sum_{\alpha \in R} \langle \beta^\vee, \alpha \rangle^2 \\ &= \gamma(R)^{-1} \sum_{\alpha \in R} \frac{\Phi_R(\alpha, \beta)^2}{\Phi_R(\beta, \beta)^2} \end{aligned}$$

soit, d'après (16)

$$\Phi_{R^\vee}(\beta^\vee, \beta^\vee) = \gamma(R)^{-1}\Phi_R(\beta, \beta)^{-2}\Phi_R(\beta, \beta)$$

ou finalement

$$\Phi_R(\beta, \beta)\Phi_{R^\vee}(\beta^\vee, \beta^\vee) = \gamma(R)^{-1}. \tag{19}$$

Si en outre toutes les racines de R ont la même longueur λ pour Φ_R, (16) et (18) montrent que

$$\gamma(R) = \lambda^{-4}. \tag{20}$$

De plus, si h est le nombre de Coxeter de W, le cor. du th. 1 du chap. V, § 6, n° 2 montre que :

$$h\Phi_R(x, x) = \sum_{\alpha \in R} \Phi_R(x, \frac{\alpha}{\lambda})^2 \quad \text{pour tout } x \in V.$$

En comparant avec (16), on en déduit :

$$\lambda = h^{-1/2} \quad \text{et} \quad \gamma(R) = h^2. \tag{21}$$

Enfin, la formule (19) montre que les racines de $R^\vee$ ont la longueur λ pour $\Phi_{R^\vee}$.

§ 2. Groupe de Weyl affine

Dans ce paragraphe (n° 5 excepté), on désigne par R un système de racines réduit dans un espace vectoriel réel V. On désigne par W le groupe de Weyl de R; on l'identifie à un groupe d'automorphismes du dual V^* de V (§ 1, n° 1), et l'on munit V^* d'un produit scalaire invariant par W. Soit E l'espace affine sous-jacent à V^*; pour $v \in V^*$, on désigne par $t(v)$ la translation de E de vecteur v. Enfin, on désigne par P (resp. Q) le groupe des translations $t(v)$ dont le vecteur v appartient au groupe des poids $P(R^\vee)$ (resp. au groupe des poids radiciels $Q(R^\vee)$) du système de racines $R^\vee$ inverse de R.

1. Groupe de Weyl affine.

Pour $\alpha \in R$ et $k \in \mathbf{Z}$, soit $L_{\alpha,k}$ l'hyperplan de E défini par:

$$L_{\alpha,k} = \{x \in E \mid \langle \alpha, x\rangle = k\}$$

et soit $s_{\alpha,k}$ la réflexion orthogonale par rapport à $L_{\alpha,k}$. On a:

$$s_{\alpha,k}(x) = x - (\langle \alpha, x\rangle - k)\alpha^\vee = s_{\alpha,0}(x) + k\alpha^\vee$$

pour tout $x \in E$. Autrement dit, on a :

$$s_{\alpha,k} = t(k\alpha^\vee) \circ s_\alpha, \tag{1}$$

où s_α est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $L_\alpha = L_{\alpha,0}$, c'est-à-dire la réflexion associée à la racine α.

La formule (1) montre que $s_{\alpha,k}$ ne dépend pas du produit scalaire choisi.

Définition 1. — *On appelle groupe de Weyl affine du système de racines* R *et on note* $W_a(R)$ (*ou simplement* W_a) *le groupe de transformations affines de* E *engendré par les réflexions* $s_{\alpha,k}$ *pour* $\alpha \in R$ *et* $k \in \mathbf{Z}$.

Proposition 1. — *Le groupe* W_a *est produit semi-direct de* W *par* Q.

Comme W est engendré par les réflexions s_α, il est contenu dans W_a. D'autre part, on a $t(\alpha^\vee) = s_{\alpha,1} \circ s_\alpha$ si $\alpha \in R$, ce qui montre que $Q \subset W_a$.